

NÚMEROS COMPLEXOS: UMA ANÁLISE HISTÓRICO- EPISTEMOLÓGICA EM FACE DAS CONCEPÇÕES OPERACIONAL E ESTRUTURAL DE ANNA SFARD

Wagner Marcelo Pommer¹

Resumo: Este artigo teve como objetivo realizar uma análise do modo como os números complexos surgiram e se desenvolveram conceitualmente através do eixo histórico-epistemológico. Como referencial teórico utilizamos as três fases de evolução dos conceitos matemáticos delineados em Sfard (1991) - pré-conceitual, operacional e estrutural - quando ocorre o reconhecimento do objeto matemático. O aporte metodológico se situou na pesquisa documental. Este estudo nos permitiu apreender que no estágio pré-conceitual ocorreu um movimento de enfrentamento para se considerar à existência das raízes quadradas de números negativos, por meio da adaptação e controle às regras habituais de cálculo. No decorrer do desenvolvimento histórico-epistemológico os números complexos foram utilizados como ferramentas para resolver equações algébricas, sendo gradualmente tomados como objeto de estudo, em uma concepção formal, própria da Matemática Abstrata, ocorrida no trânsito do estágio operacional para o estrutural. No campo didático a narrativa desses relatos poderia contribuir para atenuar a resistência dos alunos secundaristas em relação aos números complexos. Entendemos que o estudo dos números complexos representa uma possibilidade de utilização da história da Matemática como suporte para elucidar como ocorre a formação e a estruturação de conceitos matemáticos.

Palavras-chave: Números Complexos; Sfard; Concepção operacional; Concepção estrutural.

COMPLEX NUMBERS: A HISTORICAL-EPISTEMOLOGICAL ANALYSIS IN FACE OF ANNA SFARD'S OPERATIONAL AND STRUCTURAL CONCEPTIONS

Abstract: This paper aimed to carry out an analysis of the way in which complex numbers emerged and conceptually developed through the historical-epistemological axis. As theoretical reference we used the three phases of mathematical concepts evolution outlined by Sfard (1991)

1 Trabalho atualmente na graduação e no mestrado acadêmico associado ao curso de Ciências-Licenciatura, da UNIFESP, campus Diadema-SP. Sou bacharel em Engenharia Mecânica pela Universidade Mackenzie (1983) e Física pela PUC/SP (1996). Tenho especialização em Matemática, pela Universidade São Judas Tadeu (1995), mestrado acadêmico em Educação Matemática (PUSP, 2008) e doutorado em Educação (FEUSP, 2012).

- pre-conceptual, operational and structural - when the recognition of the mathematical object occurs. The methodological support was based on documentary research. This study allowed us to apprehend that in the pre-conceptual stage there was a confrontation movement in considering the existence of square roots of negative numbers, through adaptation and control to the usual calculation rules. During historical-epistemological development, complex numbers were used as tools to solve algebraic equations, gradually being taken as an object of study, in a formal conception, typical of Abstract Mathematics, occurring in the transition from the operational to the structural stage. In the didactic field, the narrative of these reports could help to mitigate the resistance of high school students in relation to complex numbers. We understand that the study of complex numbers represents a possibility of using the history of Mathematics as a support to elucidate how the formation and structuring of mathematical concepts occurs.

Keywords: Complex Numbers; Sfard; Operational design; Structural design.

1 INTRODUÇÃO

O conhecimento humano sobre os números decorreu de práticas e indagações provenientes de comerciantes, filósofos e matemáticos das várias civilizações antigas. O desenvolvimento histórico permeou o aparecimento dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais, reais e complexos, assuntos inerentes ao currículo da Educação Básica.

Do ponto de vista epistemológico os números complexos correspondem à apresentação de uma estrutura mais ampla que a dos números reais. No campo da Matemática isto envolve a introdução de um novo campo de estudo. Em se considerando o campo da didática, esse momento poderia situar uma oportunidade para que os estudantes pudessem reconhecer que a Matemática envolve certas potencialidades. Nesse sentido, Bachtold e Hausberger (2013) ponderam que os números complexos são objetos situados na transição entre o Ensino Médio e a Universidade, por dois motivos. Do ponto de vista institucional os números complexos:

[...] são ensinados no final do ciclo secundário e no ingresso na universidade [...]; do ponto de vista epistemológico, na medida em que constituem um objeto de conhecimento que pode servir como uma iniciação ao pensamento matemático avançado (BACHTOLD; HAUSBERGER, 2013, p. 78).

Ghedamsi (2017) destaca que os números complexos representam um tema de difícil compreensão conceitual para alunos da escolaridade básica. Usualmente, após uma predominância de trabalho com os números reais, ao longo do Ensino Fundamental e Médio, os livros didáticos introduzem os números complexos ao final do 3º ano do Ensino Médio.

Esta forma de abordagem carrega um obstáculo de origem didática, pois no decorrer de toda a escolaridade básica estava explicitamente declarada a não existência da raiz quadrada de um número real negativo, conforme relatam Rosa (1998) e Lopes, Cabral e Alves (2011).

Da Silva e Bernardino (2019) apontam que os números complexos foram introduzidos nos programas de ensino brasileiros em 1941, por meio da Reforma

Capanema. Porém, a partir dessa época, foi usual situar os números complexos, de modo reservado, no último ano do que atualmente denominamos Ensino Médio, após uma extensiva predominância da apresentação do conjunto dos números reais, desde o 8º ano do Ensino Fundamental.

Ao final do século XX os números complexos estavam descritos nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que vingou até meados de 2016. Porém, apesar de constar deste documento, autores como Carneiro (2004a;b), Fontes e Muniz (2013) e Puhl e Lima (2014) relatavam que estes eram raramente abordados na sala de aula do Ensino Médio.

Na atual Base Nacional Comum Curricular, descrita em Brasil (2018), os números complexos não são mencionados, o que configura um cenário optativo para abordar esse tema na Educação Básica. Puhl e Lima (2018) destacam que essa ausência dos números complexos na mais recente proposta curricular nacional prescrita ocasiona um descompromisso da abordagem desse tema no Ensino Médio, o que pode acarretar prejuízos na formação técnica-científica em alguns cursos do Ensino Superior.

Em se considerando os livros didáticos brasileiros do Ensino Médio, Carneiro (2004a;b) aponta que usualmente a introdução dos números complexos ocorre por meio da definição, momento em que se apresenta o registro de escrita algébrica na forma $z = a + bi$, com 'a' e 'b' números reais, i representa a unidade imaginária e $i^2 = -1$.

Neste viés, o objetivo deste artigo foi realizar uma análise do modo como os números complexos surgiram e se desenvolveram conceitualmente através do eixo histórico-epistemológico.

2 REFERENCIAIS TEÓRICOS

Uma importante consideração se faz com relação ao fato de que o processo de aprendizagem em Matemática deveria incluir “[...] não somente os ‘produtos finais refinados’ da atividade matemática, mas também o entendimento de suas motivações implícitas, as ações de criação de sentido e os processos reflexivos dos matemáticos, que buscam a construção do significado”² (CLARK *et al.*, 2016, p. 136, tradução nossa).

Machado (2004) argumenta que o processo de ensino, em qualquer disciplina, perpassa o uso da visão histórica do desenvolvimento dos temas, pois nela se encontram os motivos que levaram estudiosos a conceber ou rejeitar fatos, conceitos, relações e propriedades.

2 “[...] not only the ‘polished products’ of mathematical activity, but also the understanding of implicit motivations, the sense-making actions and the reflective processes of mathematicians, which aim to the construction of meaning”.

A esse respeito, acrescentamos algumas ideias de André Weil (1906-1998), proferidas no Congresso de Matemáticos de Helsinque, ocasião em que o referido matemático argumentava que o ser humano possui um natural desejo de conhecer como os conceitos da matemática se originaram e desenvolveram ao longo do tempo. Além disso, o recurso a História da Matemática pode ser um potente auxílio didático para incrementar a apresentação de temas da Matemática em sala de aula, conforme expõe Vianna (1998).

Schubring (1997) aponta que o uso de elementos históricos na sala de aula pode ocorrer por meio de uma abordagem que coloque em relevo a análise dos fatos, conceitos, problemas e demonstrações envolvidos no processo de gênese de um determinado conhecimento matemático. Posteriormente, Schubring (2004) acrescentaria que o uso de história de Matemática no ensino desta disciplina apresenta uma prototeia de complexidade que vai muito além de detectar, recolher, ordenar e revelar fatos em uma série cronológica.

O caminho histórico apresenta uma referência epistemológica e fonte de recursos para promover a compreensão de temas do ensino, conforme ilustra Machado (2001). O mencionado autor elucida que a via histórica se enriquece se for atrelada ao estabelecimento de uma rede de significações, que permite enredar, tecer significações e partilhar significados.

Os significados, por sua vez, são construídos por meio de relações estabelecidas entre os objetos, as noções, os conceitos. Um significado é como um feixe de relações. O significado de algo é construído falando-se sobre o tema, estabelecendo conexões pertinentes, às vezes insuspeitadas, entre diversos temas. Os feixes de relações, por sua vez, articulam-se em uma grande teia de significações e o conhecimento é uma teia desse tipo (MACHADO, 2001, p. 4).

Temos por hipótese que o estudo de tópicos em um viés que articule a História da Matemática e a Epistemologia se constitui em um dos elementos que permite criar um contexto narrativo que possibilita a compreensão dos significados dos conceitos matemáticos.

Segundo os princípios da matemática atual, que se fundamentam nos desenvolvimentos de Hamilton e Cauchy, os números complexos representam uma estrutura de corpo. Deste modo, um número complexo na forma algébrica $z = a + bi$, com 'i' sendo a unidade imaginária, representa um Afixo, ou seja, um par ordenado de números reais (a;b), ou como um vetor no Plano de Argand-Gauss com origem em (0,0), conforme descreve Maor (2008).

Para o desenvolvimento histórico-epistemológico do tema dos números complexos, neste texto, consideramos os pressupostos de Anna Sfard (1991). Para esta autora, os conceitos, na Matemática, seguem três fases de desenvolvimento.

(1) o estágio pré-conceitual, no qual os matemáticos estavam se acostumando a certas operações sobre os números já conhecidos [...] as manipulações eram tratadas como eram; como processos e nada mais [...]; (2) um longo período de abordagem predominantemente operacional, durante o qual um novo

tipo de número começou a emergir dos processos familiares [...], nesta fase, o nome recém-introduzido do novo número serviu de criptograma para certas operações, em vez de como significante de qualquer objeto 'real' [...]; (3) a fase estrutural, quando o número em questão foi finalmente reconhecido como um objeto matemático completo (SFARD, 1991, p. 13-14)³.

As reflexões no terreno epistemológico e ontológico levaram Sfard (1991) a considerar que os conceitos matemáticos apresentam duas dimensões duais e complementares: a operacional e a estrutural. A autora observa que há um grande hiato ontológico entre a concepção operacional e a estrutural, pois a concepção operacional é dinâmica, detalhada e sequencial, enquanto que a concepção estrutural é estática, integrativa e instantânea.

A palavra 'conceito' (às vezes substituída por 'noção') será mencionada sempre que uma ideia matemática estiver em causa em sua forma 'oficial' – como uma construção teórica dentro do 'universo formal do conhecimento ideal'; todo o conjunto de representações e associações internas evocadas pelo conceito – a contraparte do conceito no 'universo do conhecimento humano' interno e subjetivo – será referido como uma 'concepção' (SFARD, 1991, p.3)⁴.

Sfard (1991) destaca que na concepção estrutural ocorre a apresentação formal dos conceitos, se parte de uma definição e se desenvolve uma estrutura de apresentação de modo abstrato, hierárquico e estruturado. Este tipo de apresentação não utiliza definições distintas ou que se façam abordagens complementares de um mesmo objeto matemático.

Ver uma entidade matemática como um objeto significa ser capaz de se referir a ela como se fosse uma coisa real - uma estrutura estática, existindo em algum lugar no espaço e no tempo. Significa também ser capaz de reconhecer a ideia 'de relance' e manipulá-la como um todo, sem entrar em detalhes (SFARD, 1991, p. 3)⁵.

-
- 3 (1) The preconceptual stage, at which mathematicians were getting used to certain operations on the already known numbers [...] manipulations were treated as they were; as processes and nothing else [...]; (2) a long period of predominantly operational approach, during which a new kind of number begun to emerge out of the familiar processes [...], at this stage, the just introduced name of the new number served as a cryptonym for certain operations rather than as a signifier of any 'real' object [...]; (3) the structural phase, when the number in question has eventually been recognized as a fully-fledged mathematical object (SFARD, 1991, p. 14, tradução nossa).
 - 4 The word 'concept' (sometimes replaced by 'notion') will be mentioned whenever a mathematical idea is concerned in its 'official' form - as a theoretical construct within 'the formal universe of ideal knowledge'; the whole cluster of internal representations and associations evoked by the concept - the concept's counterpart in the internal, subjective 'universe of human knowing' - will be referred to as a 'conception' (SFARD, 1991, p. 3, tradução nossa).
 - 5 Seeing a mathematical entity as an object means being capable of referring to it as if it was a real thing - a static structure, existing somewhere in space and time. It also means being able to recognize the idea 'at a glance' and to manipulate it as a whole, without going into details (SFARD, 1991, p. 3, tradução nossa).

Por outro lado, interpretar uma noção como concepção operacional “[...] implica considerá-lo como uma entidade potencial e não real, que passa a existir mediante solicitação em uma sequência de ações” (SFARD, 1991, p. 3).⁶ Deste modo, certo conceito matemático pode ser considerado como processo e estrutura ao mesmo tempo, o que possibilita haver maior compreensão do próprio tema, principalmente se considerarmos o campo de ensino-aprendizagem e, especialmente, se o contexto se situar na escolaridade básica.

Embora ostensivamente incompatíveis (como algo pode ser um processo e um objeto ao mesmo tempo?), eles são de fato complementares. O termo ‘complementaridade’ é usado aqui no mesmo sentido que na Física, onde entidades em nível subatômico devem ser consideradas tanto como partículas quanto como ondas para permitir a descrição completa e explicação dos fenômenos observados (SFARD, 1991, p. 4-5)⁷.

A seguir, apresentamos a metodologia para fundamentar a análise histórico-epistemológica dos números complexos.

3 A METODOLOGIA

A metodologia adotada nesse estudo se caracterizou como qualitativa, concretizada a partir da pesquisa documental. Um documento pode ser considerado como toda forma ou “[...] suporte que contenha informação registrada, formando uma unidade, que possa servir para consulta, estudo ou prova. Incluem-se nesse universo os impressos, os manuscritos, os registros audiovisuais e sonoros, as imagens, entre outros” (APPOLINÁRIO, 2009, p. 67).

Oliveira (2007) pontua que as pesquisas de estratégia documental têm como característica o estudo de fonte de dados textos e artefatos de domínio científico, tais como livros, periódicos, enciclopédias, e artigos científicos, dentre outros. O autor aponta que um fator importante para quem faz opção por esse tipo de pesquisa é se certificar que as fontes a serem pesquisadas já são reconhecidamente de domínio científico.

Considerando-se um retrospecto, Sá-Silva, Almeida e Guindani (2009) alertavam que até o final do século XIX, a escola positivista tinha escolhido o registro escrito como meio oficial de pesquisa. Nesse mote, o “[...] documento assumia o peso da prova histórica e a objetividade em garantia pela fidelidade ao mesmo” (SÁ-SILVA; ALMEIDA; GUINDANI, 2009, p. 6). Atualmente, a busca

6 “[...] implies regarding it as a potential rather than actual entity, which comes into existence upon request in a sequence of actions” (SFARD, 1991, p. 3, tradução nossa).

7 Although ostensibly incompatible (how can anything be a process and an object at the same time?), they are in fact complementary. The term ‘complementarity’ is used here in much the same sense as in physics, where entities at subatomic level must be regarded both as particles and as waves to enable full description and explanation of the observed phenomena (SFARD, 1991, p. 4-5, tradução nossa).

em documentos deve ser utilizada e valorizada, constituindo uma importante fonte de pesquisa em vista do volume de literatura científica disponível.

A riqueza de informações que deles podemos extrair e resgatar justifica o seu uso em várias áreas das Ciências Humanas e Sociais porque possibilita ampliar o entendimento de objetos cuja compreensão necessita de contextualização histórica e sociocultural (SÁ-SILVA; ALMEIDA; GUINDANI, 2009, p. 2).

A principal finalidade da pesquisa documental, segundo Gil (2002), é proporcionar um contato com obras, artigos ou documentos, de modo a ser possível levantar as contribuições científicas sobre determinado assunto que se deseja investigar. Nessa perspectiva, Cellard (2008) observa que a análise de documentos favorece o processo de maturação ou de evolução de indivíduos, grupos, conceitos, conhecimentos, comportamentos, mentalidades e práticas.

De acordo com Corsetti (2006), a pesquisa documental apresenta algumas metas: (a) identificar técnicas ou conceitos; (b) identificar estudos semelhantes ou precursores ao que se pretende investigar; (c) levantar justificativas; (d) realizar inferências ou comparações no material pesquisado. Assim, o ponto principal nas pesquisas do tipo documental situa que:

[...] o cruzamento e confronto das fontes é uma operação indispensável, para o que a leitura hermenêutica da documentação se constitui em operação importante do processo de investigação, já que nos possibilita uma leitura não apenas literal das informações contidas nos documentos, mas uma compreensão real, contextualizada pelo cruzamento entre fontes que se complementam, em termos explicativos (CORSETTI, 2006, p. 36).

Neste estudo, a pesquisa documental se efetivou por meio da busca de artigos, dissertações e teses que tratavam do objeto ‘números complexos’, tendo como prerrogativa uma elucidação do contexto histórico-epistemológico do tema em face da possível articulação com a concepção de Anna Sfard (1991) em relação às três fases de desenvolvimento dos conceitos: os estágios pré-conceitual, operacional e estrutural.

Nesse sentido, a seguir, passamos a delinear um percurso histórico-epistemológico dos números complexos tomando como elemento de análise as três fases do desenvolvimento dos conceitos de Sfard (1991) e o material coletado na pesquisa bibliográfica.

4 A ANÁLISE HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Uma importante via de pesquisa, sobre qualquer objeto matemático, requer um estudo sobre as possibilidades didáticas advindas da conjunção da área da História da Matemática e do campo da Epistemologia. Nesse viés, torna-se fundamental analisar o modo como os números complexos evoluíram no enfoque histórico-temporal.

Inicialmente, em se considerando o ponto de vista da etimologia, a pesquisa de França (2017) destaca alguns aspectos que surgiram no decorrer da História da Matemática com relação ao tema dos números complexos.

Girolamo Cardano (1501-1573 d.C.), médico por profissão, escreveu cerca de duzentos textos envolvendo diversas áreas do conhecimento científico, como a matemática, filosofia, música e outros assuntos. Cardano utilizou o termo ‘números sofisticos’⁸ ao realizar estudos sobre o que bem posteriormente se denominou teoria das equações algébricas.

Foi John Wallis⁹ que descreveu as raízes quadradas de números negativos como ‘números absurdos’. Posteriormente, Albert Girard¹⁰ denominou os atuais números complexos como ‘números inexplicáveis’.

Por sua vez, René Dèscartes¹¹ os chamou de ‘números imaginários’, Christiaan Huygens¹² como ‘números incompreensíveis’ e, finalmente, Johann Carl Friedrich Gauss¹³ cunhou o termo números complexos. Esta última denominação de Gauss – números complexos - acabou se tornando o termo oficial para o conhecimento matemático desse tema, a partir de 1831.

Para o desenvolvimento deste texto, foram utilizadas as três fases de desenvolvimento dos conceitos, conforme Sfard (1991), para se realizar a análise histórico-epistemológica do tema dos números complexos.

4.1 O ESTÁGIO PRÉ-CONCEITUAL DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Sfard (1991) argumenta que o estágio pré-conceitual é o período no qual os estudiosos sobre certo assunto matemático estavam se acostumando a certas

8 Sofístico, adjetivo que provém do latim *sophisticus*, que significa capicioso, enganoso, falso, ilusório.

9 John Wallis (1616-1703 d.C.) foi um matemático britânico e é conhecido como precursor do Cálculo Diferencial e Integral. Wallis foi pioneiro ao interpretar os números negativos na reta real como um elemento de igual distância em relação à origem, com relação ao correspondente número positivo real.

10 Albert Girard (1595-1632 d.C.) foi um matemático francês, conhecido por ter estabelecido relações de soma e produto entre as raízes de uma equação do 3º e 4º grau (as denominadas relações de Girard no estudo das equações polinomiais). Ainda, introduziu as primeiras abreviaturas ‘sen’, ‘cos’, ‘tan’ e também desenvolveu esboços do Teorema Fundamental da Álgebra.

11 René Descartes (1596-1650 d.C.) é especialmente conhecido pelo livro ‘Discurso sobre o método para bem conduzir a razão na busca da verdade dentro da ciência’ (original em francês *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences*), de 1637.

12 Huygens (1629-1695 d.C.) foi um matemático, físico, engenheiro, astrônomo e inventor holandês.

13 Gauss (1777-1855 d.C.) foi físico, astrônomo e matemático alemão que contribuiu em diversos segmentos da ciência e, em particular, em áreas da Matemática como a Teoria dos Números, Estatística, Análise Matemática e Geometria Diferencial.

operações, sendo que as manipulações eram tratadas como processos. Da Silva (2011) comenta sobre o trabalho dos matemáticos hindus, como Brahmagupta¹⁴ e Bhaskara Acharia¹⁵. Nos trabalhos de Bhaskara se percebe a problemática de extração de raízes quadradas quando o discriminante é negativo: “A raiz quadrada de um afirmativo é dupla: positiva e negativa. Não há raiz quadrada de um negativo” (DA SILVA, 2011, p. 81).

Com relação aos números complexos, Miles (1993) relembra que ao se depararem com uma raiz quadrada negativa, os matemáticos pré-renascentistas interpretavam que o problema originalmente proposto não tinha sentido ou solução, pois geralmente estes povos antigos tinham relação com atividades do mundo material. Isto configurou dificuldades ou obstáculos para diversos estudiosos em lidar com a concepção da raiz quadrada de um número negativo, de modo que muitos deles abandonavam o problema. Bem posteriormente, desta feita na Europa Renascentista, as raízes quadradas negativas reaparecem com Scipione Del Ferro¹⁶, que descobriu um método¹⁷ para resolver a equação cúbica reduzida do tipo $x^3 + ax = b$, conforme relatam O'Connor e Robertson (1999).

Neste período da Renascença, os debates públicos entre matemáticos italianos eram comuns. O'Connor e Robertson (1999) ressaltam que esses debates geravam prestígio social e profissional para os vencedores. Nestes, os pelejantes propunham problemas para o adversário resolver. Essas características, provavelmente, levaram Scipione Del Ferro a não publicar seus trabalhos, a fim de que tivesse um trunfo para propor problemas que seus colegas poderiam não conseguir resolver durante esses eventos. Assim, Miles (1991) faz referência que Scipione Del Ferro, ao final da vida, ensinou seu método a dois discípulos: Annibale della Nave – seu futuro genro e sucessor na cátedra em Bolonha – e Antonio Maria Fiore.

14 Brahmagupta (598-668 d.C.) foi um matemático e astrônomo hindu que colocou o zero com estatuto de número e forneceu regras para manuseá-lo. Brahmagupta apresentou o cálculo do ponto de quebra de uma vara de bambu de dez pés cuja ponta atinge o chão a três pés do caule, que estava no texto chinês *Chiu-chang shuan-shu* (c. 50 a.C.–100 d.C.).

15 Bhaskara Acharia (1114–1185 d.C.) ou Bhaskara II foi um prolífero matemático e astrônomo hindu, tendo desenvolvido trabalhos em diversas áreas da Matemática. No Brasil, em meados do Movimento da Matemática Moderna, o nome de Bhaskara II passou a designar a fórmula de resolução da equação do 2º grau, cujo primeiro autor foi provavelmente o matemático indiano Sridhara (870-930 d.C.).

16 Scipione Del Ferro (1465–1526 d.C.) foi professor na Universidade de Bolonha, fundada no século XI, onde ensinava Aritmética e Geometria.

17 O método de Scipione Del Ferro utilizava como linguagem versos, em que o leitor poderia roteirizar a resolução da equação por meio de cálculos numéricos, sem fazer uso da escrita algébrica atual.

Em 1535, houve um debate público entre Annibale della Nave e Niccolò Fontana, mais conhecido como Tartaglia¹⁸, conforme relata Da Silva (2011). Tartaglia aprendeu, como autodidata, a lidar com as equações cúbicas da forma $x^3 + px^2 = q$. Neste embate cada oponente apresentou trinta problemas ao adversário. Annibale della Nave apresentou problemas que envolviam equações cúbicas reduzidas do tipo $x^3 + ax = b$, que seu falecido sogro lhe havia ensinado. Tartaglia conseguiu adaptar o processo que ele conhecia das equações do tipo $x^3 + px^2 = q$ durante o debate e, assim, resolveu todas as questões propostas por Annibale della Nave, tornando-se vencedor do evento.

Em 1539, houve um pedido de contato de Girolamo Cardano direcionado a Tartaglia, solicitado em meio a promessas (posteriormente não respeitadas) de Cardano em não revelar as descobertas. Não se conhece o motivo, mas no referido encontro Tartaglia contou o segredo da resolução das equações cúbicas para Cardano.

O'Connor e Robertson (1999) observam que, em 1543, Girolamo Cardano viajou a Bolonha para encontrar Annibale della Nave, com a intenção de descobrir o que continha o caderno de Scipione Del Ferro (o falecido sogro de dela Nave). Cardano teve sucesso na arte de dissuadir della Nave e conseguiu o método de resolução das equações cúbicas descoberto por Scipione Del Ferro. Posteriormente, Cardano publicou, em 1545, o livro *Ars Magna*, onde descreveu o referido método, fazendo breve menção sobre as descobertas de Scipione Del Ferro e Tartaglia, que tinham sido os verdadeiros autores da resolução dos problemas das equações cúbicas.

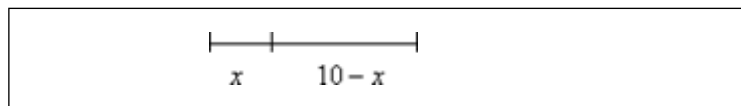
Em síntese, o trabalho dos matemáticos renascentistas Scipione Del Ferro e Niccolò Fontana (Tartaglia) para a solução de equações de 3º grau atacou a resistência com relação à existência das raízes quadradas de números negativos.

Podemos interpretar essa descoberta de Scipione Del Ferro e Tartaglia na fase pré-conceitual proposta por Sfard (1991), pois os números complexos se restringiam a certas manipulações feitas como processos numéricos, em um momento de entendimento parcial do tema no universo do conhecimento matemático, revelando um encontro inicial do ser humano com os números complexos.

Passamos a destacar um problema do capítulo 37 do *Ars Magna*, de Girolamo Cardano, apontado em Miles (1991), para ilustrar o estágio pré-conceitual, conforme categorizou Sfard (1991). O cujo enunciado do problema matemático era: Divida um segmento de comprimento 10 em duas partes cujo produto seja 40, apontado na Figura 01.

18 Niccolò Fontana (1500-1557 d.C.) tinha como pseudônimo Tartaglia, por ter sido ferido na garganta durante uma invasão francesa, quando criança. Ele era autodidata e tinha extrema capacidade em lidar com a matemática. Tartaglia traduziu uma edição do famoso *Os Elementos*, de Euclides, baseada em uma versão latina de um texto grego de Zamberti.

Figura 01: O problema do Capítulo 37 do Ars Magna, de Cardano.



Fonte: Miles (1993, p. 8).

Relembramos que a solução desse problema pelos antigos matemáticos italianos mencionados era realizada por meio de versos, conforme pode ser conferido no artigo de Da Silva (2011). A seguir, exploramos a resolução por uma versão atualizada, que faz uso da linguagem algébrica.

Observando-se a Figura 01, se 'x' representar o comprimento de um dos segmentos, o outro segmento terá comprimento $10-x$, que aplicados a condição desse problema resulta $x(10-x) = 40$, cuja resolução recai nas soluções $x = 5 \pm \sqrt{-15}$. Miles (1993) destaca que Cardano afirmava que o problema não tinha solução, e que as raízes eram sutis e inúteis. Porém, Cardano percebeu que ao se multiplicar as raízes $(5 + \sqrt{-15}) \cdot (5 - \sqrt{-15})$ resultava $25 - (-15) = 40$, que verificava as condições iniciais.

Maor (2008) ressalta que Cardano, ao manipular a expressão descrita acima, ficou “[...] intrigado com o fato de que, se operasse com essas soluções imaginárias de um modo puramente formal, como se elas obedecessem a todas as regras da aritmética ordinária, as duas soluções preenchiam as condições do problema” (p. 215). Assim, em período posterior, Cardano denominou essas expressões de *raízes sofisticadas* da equação.

Artigue e Deledicq (1992) consideram a primeira fase da história dos números complexos, a qual Sfard (1992) denomina estágio pré-conceitual, como um momento que evidencia a pertinência epistemológica de determinadas ferramentas que surgiram no campo de descobertas como possível suporte didático para o ambiente escolar. Nesse sentido, podemos associar esse momento histórico-epistemológico do estágio pré-conceitual de Sfard com relação aos números complexos a três pontos favoráveis para o campo didático, que estão discutidos no artigo de Artigue e Deledicq (1992), a saber: “[...] o papel impulsionador dos desequilíbrios cognitivos; a distinção entre os pólos ferramenta e objeto de um conceito matemático; as diferenças entre a lógica do ensino e a lógica da história no campo didático” (p. 10)¹⁹.

Pelo que foi discutido no estágio pré-conceitual de Sfard (1992), observamos que:

19 “[...] le rôle moteur des déséquilibres cognitifs; la distinction entre les pôles outil et objet d’un concept mathématique; les différences entre la logique de l’enseignement et celle de l’histoire didactique” (ARTIGUE; DELEDICQ, 1992, p. 10, tradução nossa).

[...] não é, no quadro da resolução das equações, do grau 2, que motivará o recurso às quantidades imaginárias, mas sim o grau 3, isto porque a resolução das equações do segundo grau não levanta nenhum problema cognitivo, ou seja, não cria nenhum desequilíbrio (ARTIGUE; DELEDICQ, 1992, p. 10)²⁰.

Para Artigue e Deledicq (1992), no campo didático, a solução deste desequilíbrio no campo dos números complexos, não consistiria em utilizar as equações de Tartaglia e Cardano no ensino básico. Pelo contrário, as contribuições se focam em uma ação mais modesta: “[...] a introdução de um novo signo, a adaptação razoável deste signo as regras habituais de cálculo por uma espécie de princípio de permanência do cálculo e o controle pragmático da validade desse princípio” (ARTIGUE; DELEDICQ, 1992, p. 10)²¹.

A seguir, passamos a desenvolver considerações com relação ao tema dos números complexos e o estágio operacional designado em Sfard (1992).

4.2 O ESTÁGIO OPERACIONAL DOS NÚMEROS COMPLEXOS

O estágio operacional, de acordo com Sfard (1991), representa um período de tempo em que um tema matemático começa a emergir a partir de processos familiares da Matemática, além de ser introduzido o termo do ‘novo número’, que serve de base para esclarecer certas operações, de modo puramente operacional.

O estágio operacional, na concepção de Sfard (1991), representa certa continuidade com as descobertas anteriores, realizadas no estágio pré-conceitual. Um matemático renascentista que podemos considerar como ‘ponto inicial’ para demarcar o estágio conceitual, conforme Sfard (1992), em relação aos números complexos foi Raphael Bombelli²², que era “[...] um dos grandes entusiastas pelo estudo do livro *Ars Magna*, porém achava a obra um pouco obscura ou incompreensível em certas passagens” (DA SILVA, 2011, p.84).

Da Silva (2011) relata que Bombelli escreveu um livro intitulado *Maggiore dell'arithmetic*, em três volumes, em 1572, um ano antes da morte de Cardano, com a intenção de utilizar uma forma de comunicação mais acessível. Neste livro, Bombelli reestudou a equação $x^3 = 15x + 4$, do livro *Ars Magna*, de Cardano. Na conclusão de sua resolução, obteve a raiz $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. De acordo

20 “[...] ce n'est pas, dans le cadre de la résolution des équations, le degré 2 qui va motiver le recours à des quantités imaginaires mais le degré 3 et ceci parce que la résolution des équations du second degré ne soulevant aucun problème cognitif, ne créait aucun déséquilibre (p. 10, tradução nossa).

21 “[...] l'introduction d'un signe nouve, l'adaptation raisonnable à ce signe des règles de calcul usuelles par une sorte de principe de permanence du calcul, le controle pragmatique de la validité de ce principe: on tombe bien sur la racine réelle cherchée (ARTIGUE; DELEDICQ, 1992, p. 10, tradução nossa).

22 Raphael Bombelli (1526-1573 d.C.) é considerado um matemático e engenheiro hidráulico italiano.

com Da Silva (2011), Bombelli percebeu que $x = 4$ era solução, algo que Cardano não havia feito. Outro fato de destaque é que Bombelli utilizou o termo ‘*più di meno*’ para se referir à unidade imaginária, que em período bem posterior foi simbolizado pela letra ‘*i*’. Da Silva (2011) esclarece que Bombelli teve a sagacidade de estabelecer regras para operar com esses números, o que denota um movimento inicial do 2º período designado por Sfard (1991) como concepção operacional.

Outro matemático italiano, Ludovico Ferrari (1522–1560 d.C.), discípulo e aluno de Cardano, promoveu outro avanço envolvendo o tema dos números complexos. Cardano havia dado uma tarefa a Ferrari: resolver a equação quártica $x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$. Conforme Da Silva (2011) “[...] Ferrari não só encontrou as quatro raízes $-3, -2, 1$ e 4 , como também obteve uma fórmula geral” (p. 86).

Foi um matemático britânico, John Wallis (1616-1703 d.C.) que, ao escrever o livro ‘Tratado de Álgebra’, aceitou as raízes negativas e as complexas. Ao resolver a equação $x^3 - 7x = 6$, ele determinou as três raízes reais $-2, -1$ e 3 . Foi John Wallis que percebeu, no livro acima mencionado, que as raízes negativas reais:

[...] tinham uma explicação física muito boa, com base em uma linha com o marco zero, e números positivos se situando a uma distância à direita do ponto zero, em que os números negativos estão a uma distância à esquerda de zero. Além disso, ele fez algum progresso em dar uma interpretação geométrica a $\sqrt{-1}$ (MERINO, 2006, p. 3)²³.

Segundo Silva (2008), o progresso de John Wallis com relação aos números complexos ocorreu em 1673, por meio do livro *De Algebra Tractatus, Historicus e*

Practicus. Neste texto, John Wallis explorou a proporção $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$, ou ainda, $a:x = x:b$, o que equivale atualmente a resolver uma equação do tipo $x^2 = a.b$, em que ‘*a*’ e ‘*b*’ são números reais.

Wallis considerou que $\sqrt{-1}$ seria a média geométrica entre $+1$ e -1 , por meio da associação com a definição aplicada em $\frac{1}{x} = \frac{x}{-1}$, que desenvolvido resulta em $x^2 = -1$. Assim, $\sqrt{-1}$ seria a medida de um segmento ortogonal a dois segmentos de sentidos opostos e de ‘medidas’ iguais a ‘ $+1$ ’ e ‘ -1 ’.

Outro aspecto que reconhecemos com sendo do período operacional apontado em Sfard (1991) foi a introdução da aceção do ‘novo número’. Assim, Hellmich (1992) e Miles (1993) indicam que o símbolo $\sqrt{-1}$ foi introduzido em 1629 por Albert Girard, sendo que a letra ‘*i*’ foi utilizada, em 1777, por Leonhard

23 [...] had a perfectly good physical explanation, based on a line with a zero mark, and positive numbers being numbers at a distance from the zero point to the right, where negative numbers are a distance to the left of zero. Also, he made some progress at giving a geometric interpretation to $\sqrt{-1}$ (MERINO, 2006, p. 3, tradução nossa).

Euler (1707-1783 d.C.) para representar $\sqrt{-1}$, e apareceu impresso pela primeira vez somente em 1794.

Foi Euler que “[...] visualizou os números complexos como pontos de coordenadas retangulares, mas não forneceu uma base satisfatória para os números complexos”²⁴ (MERINO, 2006, p. 4). Este símbolo começou a ser aceito como um objeto matemático e utilizado pela comunidade após o uso por Carl Friedrich Gauss (1777-1855 d.C.), em 1801.

Em síntese, esse momento histórico - com Bombelli, Ferrari, Wallis e outros matemáticos - estabeleceu modos de lidar com a escrita e a realização de cálculos envolvendo os números complexos, de modo que a resolução dos problemas se situava em uma abordagem predominantemente operacional. Neste viés, foram consideradas formas de conectar os problemas propostos a processos familiares aos matemáticos e, além disso, um novo tipo de nome emergiu no cenário da matemática: as ‘raízes sofisticadas’ de uma equação polinomial.

4.3 O ESTÁGIO ESTRUTURAL DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Conforme descrição de Sfard (1991), na fase estrutural o conhecimento matemático é reconhecido como um objeto matemático completo. No caso dos números complexos, isto corresponderia a expressão analítica dos números complexos dada por $a + bi$, onde $i^2 = -1$, ‘a’ e ‘b’ Reais, com $b \neq 0$, dada por Gauss²⁵.

A expressão analítica dos números complexos de Gauss caracteriza o início do estágio estrutural designado por Sfard (1991), pois o número complexo começou seu percurso para ser reconhecido como um objeto próprio, no contexto do universo matemático. Neste percurso da fase estrutural apontamos Caspar Wessel (1745-1818 d.C.), um autodidata, que foi o primeiro a formular uma interpretação geométrica adequada para os números complexos no texto *‘Sobre a representação analítica da direção: uma tentativa’*, publicado em 1799, pela Academia Real Norueguesa de Ciências. Neste artigo, se destaca como “[...] +1 a unidade retilínea positiva, por $\sqrt{-1}$ outra perpendicular à primeira, com a mesma origem; então o ângulo de direção de +1 será 0° , o de -1 será 180° [e] o de $\sqrt{-1}$ será 90° ” (MILES, 1993, p.13).

O artigo de Wessel, escrito em dinamarquês, passou despercebido até 1897, quando foi desenterrado por um colecionador, e seu significado foi reconhecido pelo matemático dinamarquês Sophus Christian Juel. A abordagem de Wessel utilizou o que atualmente denominamos vetores. Ele usa a adição geométrica de vetores (a lei do paralelogramo) e definiu a multiplicação de

24 “[...] visualized complex numbers as points with rectangular coordinates, but did not give a satisfactory foundation for complex numbers” (MERINO, 2006, p. 4, tradução nossa).

25 Carl Friedrich Gauss (1777-1855 d.C.) foi um renomado matemático alemão.

vetores em termos do que atualmente denominamos adição dos argumentos e multiplicando as magnitudes (MERINO, 2006, p. 4)²⁶.

De forma análoga, Jean-Robert Argand (1768-1822 d.C.), outro autodidata, publicou em 1806 um panfleto intitulado *Essai sur la manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, de acordo com Miles (1993) e Merino (2006). O ensaio não continha o nome de Jean-Robert Argand. Esse texto teve divulgação bem restrita, mas uma cópia acabou sendo lida pelo matemático A. Legendre (1752-1833 d.C.), que a remeteu a François Français, um professor universitário de matemática. Muitos anos depois, em 1813, Jaques, um irmão de François Français, publicou um artigo:

[...] no *Annales de Math'Emathiques*, fornecendo o básico de números complexos. No último parágrafo do artigo, Jaques reconheceu sua dívida com a carta de Legendre e instou o autor desconhecido a se apresentar. Argand soube disso e sua resposta apareceu na próxima edição do *Jornal* (MERINO, 2006, p. 5)²⁷.

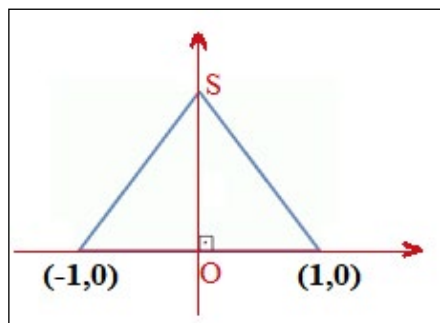
No ensaio, de 1806, Jean-Robert Argand acentuava que “[...] se multiplicamos +1 por i obtemos i e se multiplicamos esse resultado novamente por i obtemos -1. Daí, Argand escolhe representar ‘ i ’ por uma operação que agisse de modo análogo. Assim, podemos representar ‘ i ’ por uma rotação de 90° em sentido anti-horário” (*apud* MILES, 1993, p. 14).

O artigo de Hellmich (1992) menciona a concepção geométrica que mostramos estar associada a Caspar Wessel e Jean-Robert Argand, registrado na Figura 2, em que o ponto S, de coordenadas (0,1) representa a unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$.

26 Wessel's paper, written in danish, went unnoticed until 1897, when it was unearthed by na antiquarian, and its significance recognized by the Danish mathematician Sophus Christian Juel. Wessel's approach used what we today call vectors. He uses the geometric addition of vectors (parallelogram law) and defined multiplication of vectors in terms of what we call today adding the polar angles and multiplying the magnitudes (MERINO, 2006, p. 4, tradução nossa).

27 [...] in the *Annales de Math'ematiques* giving the basics of complex numbers. In the last paragraph of the paper, Jaques acknowledged his debt to Legendre's letter, and urged the unknown author to come forward. Argand learned of this and his reply appeared in the next issue of the journal (MERINO, 2006, p. 5, tradução nossa).

Figura 2: Interpretação geométrica de $\sqrt{-1}$.



Fonte: Adaptado de HELLMICH (1992).

Há indícios que Gauss possuía a representação geométrica dos números complexos desde 1796, mas foi publicado somente em 1831, quando ele enviou suas ideias à Sociedade Real de Gottingen, conforme descreve Merino (2006). Atualmente, a representação geométrica dos números complexos é realizada no Plano de Gauss, ou ainda, no Plano de Argand-Gauss, já que as descobertas parecem terem sido feitas de modo independente.

O artigo de Grimberg (2014) relata e analisa a autorresenha envolvendo uma segunda memória de Carl Friedrich Gauss sobre os resíduos biquadráticos, escrito em 1831, intitulado *Theoria Residuorum BIquadraticum Commentatio Segunda*. Este artigo de Gauss foi “[...] editado na revista *Anzeigen*, da sociedade de Göttingen, e se endereçava a um público mais amplo do que a comunidade matemática” (GRIMBERG, 2014, p. 146). Outro ponto apontado por Grimberg (2014) foi uma preocupação de Gauss (1801) em acabar com a oposição entre números reais e imaginários, que repercutiu grande tempo nos autores daquela época. O termo ‘imaginário’ foi utilizado pela primeira vez por René Descartes em 1637, no texto intitulado ‘A Geometria’, que era um apêndice do livro ‘Discurso Sobre o Método de Bem Utilizar a Razão e de Encontrar a Verdade nas Ciências’. Bem posteriormente, no século XIX, Gauss propôs a denominação ‘números complexos’ ao invés de números imaginários ou impossíveis, que ainda repercutia na época, principalmente devida a influência de Euler.

Por quantidade imaginária, entendo sempre aqui uma quantidade expressa sob a forma $a + b\sqrt{-1}$, onde b é diferente de 0. Se as quantidades imaginárias ficam aceitas na análise (o que por várias razões me parece preferível a estas serem rejeitadas, desde que estejam estabelecidas com um fundamento suficientemente sólido), dever-se-ia poder considerá-las como tão possíveis quanto às quantidades reais; e nestes cálculos prefiro abranger ambas as quantidades reais e imaginárias sob a denominação comum de quantidades possíveis (GAUSS, 1797, W. III, p.6, *apud* GRIMBERG, 2014, p. 149).

Grimberg (2014) observa que o principal argumento de Gauss em favor da realidade dos números imaginários é que os conceitos matemáticos são pertinentes

desde que sejam possíveis. Este argumento de Gauss se fundamenta no argumento devido a Leibniz, que coloca como domínio das verdades necessárias o princípio de não contradição. Para Gauss:

[...] os conceitos matemáticos são pertinentes desde que sejam possíveis, ou seja, não contraditórios. Este critério (a não contradição) fundamenta e justifica a existência e a realidade dos conceitos matemáticos da aritmética; a concepção de Gauss se situa assim na tradição leibniziana, considerando o domínio da matemática como domínio das verdades necessárias regidas pelo princípio de não contradição possíveis (GAUSS, 1799, W. III, p. 6 *apud* GRIMBERG, 2014, p. 150).

Grimberg (2014) ilustra a concepção de Gauss sobre os números complexos, o que incluiu uma visão geométrica em relação ao que atualmente se denomina Plano de Argand-Gauss. Grimberg (2014) aponta que um argumento essencial de Gauss para aqueles que ainda não observavam a existência dos números complexos: exibir uma clara apreensão sensível, pela associação de cada ponto de coordenadas inteiras a um número complexo inteiro.

Não se trata nem de uma construção nem de uma fundamentação do conceito de número complexo inteiro, pois esta apreensão se constrói depois. [...] A intenção de Gauss é tornar mais viva a compreensão dos números complexos, e por meio desta visualização pretendia mostrar que os números complexos podem se inscrever na realidade sensível (GRIMBERG, 2014, p. 150).

A análise de Grimberg (2014) com relação ao livro ‘*Disquisitiones arithmeticae*’, de Gauss (1801), revelou que houve uma progressão da apreensão sensível dos números complexos, viabilizada pelo tipo de registro de representação geométrica, que, por analogia, promoveu uma espécie de identidade na relação entre os números e os pontos do plano. Gauss argumentava que a relação previamente citada “[...] são entregues à visão (*Anschauung*) apenas através de uma representação (*Darstellung*) no espaço” (GRIMBERG, 2014, p. 151).

No livro de Gauss a apreensão sensível (denominada pelo autor de *Versinnlichung*) dos números complexos ocorre por via dos pontos do plano. Nas observações de Gauss há uma:

[...] apreensão sensível (*Versinnlichung*) dos números complexos por via dos pontos do plano, a constatação por analogia (o termo é de Gauss), e a identidade das relações entre os números, por um lado, e entre os pontos, por outro lado. A representação geométrica dos números complexos se transforma em representação (*Darstellung*) das relações entre os mesmos (GRIMBERG, 2014, p. 150).

Grimberg (2014) destaca na obra de Gauss o termo *Versinnlichung* (Hipotipose), especialmente utilizado para realizar a representação de um número complexo no plano. Grimberg (2014) aponta em Immanuel Kant, no texto A Crítica do Juízo, que o termo *Versinnlichung* tem função esquemática ou simbólica. A concepção de Kant da *Versinnlichung* é de uma figura retórica de pensamento, em que se manifesta um novo domínio de reflexão para o matemático, e que ocorre

uma “[...] representação tão viva dos objetos pela palavra que se acredita mais ver do que ouvir a própria narrativa” (GRIMBERG, 2014, p. 151).

A representação geométrica dos números complexos por meio de pontos do plano:

[...] foi decisiva para sua aceitação. A possibilidade dessa representação era clara para vários autores, como Cotes, De Moivre, Euler e Vandermonde; todos eles tentaram resolver a equação $x^n - 1 = 0$ pensando em suas soluções como vértices de um polígono regular de n lados. Essa ideia era ainda incompleta, pois nenhum desses autores achou uma interpretação geométrica para as operações com complexos (MILES, 1993, p.13).

Grimberg (2014) aponta que um argumento essencial de Gauss para aqueles que ainda não observavam a existência dos números complexos: exibir uma clara apreensão sensível, pela associação de cada ponto de coordenadas inteiras a um número complexo inteiro. “A intenção de Gauss foi tornar mais viva a compreensão dos números complexos, e por meio desta visualização pretendia mostrar que os números complexos podem se inscrever na realidade sensível” (GRIMBERG, 2014, p. 150).

De acordo com Merino (2006), foi William Rowan Hamilton (1805-1865 d.C.), que em:

[...] um livro de memórias, escrito em 1831, definiu pares ordenados de números reais (a, b) como uma dupla. Assim, ele definiu a adição e a multiplicação de pares ordenados: $(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$ e $(a, b).(c, d) = (ac-bd, bc+ad)$. De fato, esta é uma definição algébrica dos números complexos²⁸ (p. 4).

Maor (2008) realça esse ponto descrito no parágrafo anterior, ao observar que a definição algébrica dos números complexos por pares ordenados de Hamilton, em 1831, realizou uma abordagem do tema “[...] de modo puramente formal, ao tratá-los como pares ordenados de números reais, sujeitos a certas regras de operação”²⁹ (p. 216), que corresponde a adição e a multiplicação por escalar e o produto de dois complexos.

Nas palavras do próprio Hamilton o símbolo $\sqrt{-1}$ era antigamente considerado um número absurdo e denotava a impossibilidade de extração, ou ainda, um número imaginário. Mas na teoria das funções conjugadas “[...] o mesmo símbolo $\sqrt{-1}$ apresenta significado e denota uma possibilidade de extração, ou seja, um par real $(-1,0)$ [...] a principal raiz quadrada do par ordenado $(-1,0)$. Assim [...]

28 “[...] in an 1831 memoir defined ordered pairs of real numbers (a, b) to be a couple. He defined addition and multiplication of couples: $(a, b)+(c, d) = (a+ c, b +d)$ and $(a, b).(c, d) = (ac-bd, bc+ad)$. This is in fact an algebraic definition of complex numbers” (p.4, tradução nossa).

29 As operações de adição e multiplicação por escalar $k.(a,b)= (ka, Kb)$ e multiplicação entre dois complexos $(a,b).(c,d) = (ac- bd, ad+bc)$, sendo (a,b) e (c,d) dois números complexos e ‘k’ um número real.

para qualquer par ordenado (a_1, a_2) ; $(a_1, a_2) = a_1 + a_2\sqrt{-1}$ (Hamilton, 1937 *apud* VEAS; GONZÁLEZ, 2013, p. 4)³⁰.

Fontes e Muniz (2013) e Ghedamsi (2017) destacam que a introdução histórica da interface geométrica concreta proporcionada pelo plano de Argand-Gauss em que os números complexos eram considerados pontos (Afixos) e, ainda, pela associação dos números complexos como vetores do plano \mathbb{R}^2 , abriu espaço na matemática abstrata para a identificação do isomorfismo³¹ entre dois espaços vetoriais: o conjunto dos números Complexos e o \mathbb{R}^2 . Isso configurou um estatuto de objeto matemático, conforme os preceitos defendidos por Sfard (1991). Assim, na Matemática, os números complexos apresentam uma estrutura de corpo³², construída algebricamente pela extensão dos números reais.

Foi no século XIX que quantidades imaginárias adquiriram seu status atual como objetos matemáticos legítimos. Isso foi realizado através da interpretação geométrica proposta por Wessel, Argand, Gauss e através das construções algébricas de Cauchy e Hamilton [...]. A representação geométrica de números complexos como pontos no plano complexo tem suas primeiras citações nos trabalhos de 1797 por C. Wessel e 1806 por J. Argand. O eixo imaginário foi introduzido, associando a raiz quadrada de -1 como uma unidade perpendicular a 1. Argand entendeu os complexos como linhas direcionadas (conforme Artigue, 1992), uma ideia que precede os vetores³³ (VEAS; GONZÁLEZ, 2013, p. 4).

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857 d.C.), em 1814, situou os números complexos no que, atualmente, foi denominado de Teoria das Funções Analíticas,

30 [...] the same symbol $\sqrt{-1}$ is significant, and denotes a possible extraction, or a real couple (-1,0) [...] the principal square root of the couple (-1,0). Therefore [...] for any couple (a_1, a_2) whatever; $(a_1, a_2) = a_1 + a_2\sqrt{-1}$ (Hamilton, 1937 *apud* VEAS; GONZÁLEZ, 2013, p. 4, tradução nossa).

31 Na Álgebra duas estruturas matemáticas são isomorfas se for possível estabelecer uma relação bijetiva entre elas. Dois objetos isomorfos são indistinguíveis, de modo que o mapeamento entre dois objetos mostra um relacionamento entre as propriedades ou operações das duas estruturas matemáticas em questão. Na Teoria dos Grupos, o isomorfismo é uma aplicação ou função $f: A \rightarrow B$ que gera uma correspondência biunívoca entre os elementos dos grupos A e B, respeitando-se as operações de cada grupo (Hazewinkel, 2001).

32 Corpo é uma estrutura algébrica abstrata em que a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão são bem-definidas. No caso, o corpo dos números complexos é dado pela tríade $(\mathbb{C}, +, *)$.

33 Fue en el siglo XIX que las cantidades imaginarias adquirieron su condición actual de objetos matemáticos legítimos. Esto se logró a través de la interpretación geométrica propuesta por Wessel, Argand, Gauss, y mediante las construcciones algebraicas de Cauchy y Hamilton [...]. La representación geométrica de los números complejos como puntos del plano complejo tiene sus primeras citas en los trabajos de 1797 de C. Wessel y de 1806 de J. Argand. Se introdujo el eje de los imaginarios, asociando la raíz de -1 como una unidad perpendicular a 1. Argand entendió a los complejos como líneas dirigidas (Artigue, 1992), idea que antecede a los vectores (VEAS; GONZÁLEZ, 2013, p. 4, tradução nossa).

através de um texto submetido à Acadêmica Francesa de Ciências. Merino (2006) comenta que o nome ‘Teoria das Funções Analíticas’ não foi designação de Cauchy.

Lira e Brandemberg (2022) relatam que foi Joseph-Louis Lagrange (1736-1813 d.C.) quem publicou a obra ‘*Théorie des Fonctions Analytiques*’, em 1797 e com segunda edição ampliada em 1813. Na época, Lagrange pensou e escreveu seu livro de modo à “[...] evitar o problema das quantidades infinitamente pequenas. Com isso, o foco principal era realizar a redução a métodos puramente algébricos, bem como suas relações operacionais, descartando a utilização de métodos infinitesimais” (LIRA; BRANDEMBERG, 2022, p. 143). Assim, essa obra de Lagrange representa outro marco de encontro dos números complexos com um estatuto de objeto matemático, no caso, sintonizando-o com o conceito de função.

Outro ponto de enlace dos números complexos envolveu a trigonometria. Nesse interim, o nome de Abraham de Moivre³⁴ (1667-1754 d.C.) merece destaque. Foi Moivre, em 1676, que escreveu “[...] uma expressão equivalente ao que atualmente conhecemos como o teorema de Moivre: $(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$, em que ‘n’ é um inteiro”³⁵ (MERINO, 2006, p. 4).

A expressão acima é conhecida como primeira fórmula de Moivre, sendo utilizada para calcular potências de números complexos na forma polar ou trigonométrica. Historicamente, foi o renomado Euler (1707-1783 d.C.) quem utilizou “[...] a fórmula $x + iy = r(\cos\theta + i \sin\theta)$, e visualizou as raízes de $z^n = 1$ como vértices de um polígono regular” (MERINO, 2006, p. 4).

Assim, a partir da expressão $z = x + iy = r(\cos\theta + i \sin\theta)$, foi obtida a 1ª fórmula de Moivre, ou seja, $z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$. E, os números complexos foram se desenvolvendo na fase estrutural, a partir do reconhecimento e desenvolvimento do objeto matemático, conforme concepção de Sfard (1991).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para se ter ideia das dificuldades dos diversos estudiosos com relação ao entendimento dos números complexos ao longo da História da Matemática podemos levar em consideração uma ponderação de Leonhard Euler (1707-1783 d.C.), um matemático do século XIX. No livro ‘Elementos de Álgebra’, de autoria de Euler, cuja primeira edição data de 1770 e publicado no Brasil em 1809, há menção da necessidade de se operar com os números imaginários, e há discussão a respeito da dificuldade de abordagem do tema.

Quando, pois, acontecer o querer se extrair a raiz de um número negativo, necessariamente haverá muito embaraço, por não poder existir número algum

34 Abraham de Moivre (1667-1754), aos dezoito anos de idade, deixou a França por motivos de perseguição religiosa e foi morar na Inglaterra (Merino, 2006, p.6, tradução nossa).

35 “[...] an equivalent expression to what is today known as de Moivre’s theorem: $(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ where ‘n’ is an integer” (MERINO, 2006, p. 4, tradução nossa).

assinalável, cujo quadrado seja negativo. Por tanto, pretender, por exemplo, extrair a raiz de -4 , seria querer achar um número, que multiplicado por si mesmo desse -4 . [...] Convém por tanto concluir, que a raiz quadrada de um número negativo não pode ser número positivo, nem negativo; pois que também os quadrados dos negativos tomam o sinal mais. É por isso de necessidade, que a raiz, de que se trata, pertença a uma espécie de números totalmente particular; pois não pode ser contada, nem entre os negativos, nem entre os positivos (EULER 1840, p. 42 apud DA SILVA, 2009, p. 46).

Os resultados que puderam ser levantados nesse estudo mostraram que no estágio pré-conceitual dos Números Complexos houve contribuição de estudiosos de diversas civilizações, especialmente no Antigo Império Árabe e na Europa Renascentista Italiana, momento em que houve um estranhamento com as raízes quadradas de números negativos através da resolução de equações de terceiro e quarto graus, sendo que estas eram resolvidas através do uso de versos, em língua natural.

No campo didático Artigue e Deledicq (1992) apontam que no período pré-conceitual a contribuição ocorreu por meio de se considerar e manipular os resultados minorando a resistência à existência das raízes quadradas de números negativos, assim como certa adaptação e controle deste signo às regras habituais de cálculo, de acordo com o princípio de permanência.

O período operacional, destacado em Sfard (1992), representou continuidade e avanço com as descobertas realizadas no estágio pré-conceitual. Assim, no estágio operacional houve progresso em realizar uma interpretação geométrica de $\sqrt{-1}$ por meio do conceito grego de média geométrica.

No período operacional Bombelli utilizou o termo '*più di meno*' para se referir à unidade imaginária, que foi simbolizado pela letra '*i*' por Leonhard Euler (1707-1783 d.C.). Ainda, Euler visualizou os números complexos como pontos de coordenadas retangulares, mas não forneceu uma base formal para os números complexos.

No terceiro e derradeiro período, denominado por Sfard (1992) como estágio conceitual, constatamos as contribuições de Caspar Wessel (1745-1818 d.C.), Jean-Robert Argand (1768-1822 d.C.) e Carl Friedrich Gauss (1777-1855 d.C.). Wessel, Argand e Gauss formularam, de modo independente, uma interpretação geométrica adequada para os números complexos, indicando $\sqrt{-1}$ no eixo vertical do Plano Complexo, por uma rotação de 90° , no sentido anti-horário do ponto (1,0).

Ainda, Euler introduziu a forma polar ou trigonométrica de um complexo e também visualizou as raízes de $z^n = 1$ como vértices de um polígono regular. Assim, no estágio conceitual houve uma apreensão sensível dos números complexos, viabilizada pelo registro de representação geométrica, que promoveu uma identidade na relação entre os números complexos e os pontos do plano de Argand-Gauss.

Por fim, William Rowan Hamilton (1805-1865 d.C.) e Augustin-Louis Cauchy (1789-1857 d.C.) formalizaram o estudo do tema por meio do registro algébrico. Nesse sentido, houve a definição de um número complexo como o par

(a, b), sujeito a certas regras de operação, em que a adição e a multiplicação eram representadas por $(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$ e $(a, b) \cdot (c, d) = (ac-bd, bc+ad)$, assim como o símbolo $i = \sqrt{-1}$ ficou associado como a principal raiz quadrada do par $(0,1)$, no plano de Argand-Gauss. Ainda, Abraham de Moivre³⁶ definiu a potência de um número complexo.

Em síntese, podemos apreender que no plano histórico-epistemológico os números complexos foram utilizados como ferramentas para resolver equações algébricas e que gradualmente se tornaram um objeto de estudo próprio de uma concepção formal da Matemática. Entendemos que o estudo dos números complexos representa uma possibilidade de utilização da história da Matemática como suporte para entender a ponte entre o concreto e abstrato, dicotomia que pode enriquecer a transição para o pensamento matemático avançado.

Aí se encontra a essência da mudança da fase operacional para a fase estrutural no marco teórico de natureza epistemológica por Sfard (1991). A autora pondera que a concepção operacional pode ser considerada como auxílio ou patamar para a estruturação de conceitos matemáticos.

A abordagem estrutural deve ser considerada como o estágio mais avançado do desenvolvimento do conceito. Em outras palavras, temos boas razões para esperar que, no processo de formação do conceito, as concepções operacionais precedem a concepção estrutural (SFARD, 1991, p. 10)³⁷.

Costa (1971) descreve que no decorrer do desenvolvimento da matemática, questionou-se o fato de não ser possível se extrair a raiz quadrada de um número negativo, no campo dos números reais. “A necessidade de levantar esta exceção, de modo a tornar possíveis todas as operações sobre números reais, teve como resultado a criação dos números complexos. Esta nova classe de números é, portanto, de origem algébrica” (COSTA, 1971, p. 222).

REFERÊNCIAS

APPOLINÁRIO, F. **Dicionário de metodologia científica**: um guia para a produção do conhecimento científico. São Paulo, Atlas, 2009.

ARTIGUE, M.; DELEDICQ, A. Quatre étapes dans l’histoire des nombres complexes: quelques commentaires épistemologiques et didactiques. **Institute de Recherche Pour L’enseignement des Mathématiques**. Paris VII, 1992.

36 Abraham de Moivre (1667-1754 d.C.), aos dezoito anos de idade, deixou a França por motivos de perseguição religiosa e foi morar na Inglaterra (Merino, 2006, p.6, tradução nossa).

37 The structural approach should be regarded as the more advanced stage of concept development. In other words, we have good reasons to expect that in the process of concept formation, operational conceptions would precede the structural (SFARD, 1991, p. 10, tradução nossa).

BACHTOLD, M.; HAUSBERGER, T. Les nombres complexes: entre mathématiques, physique et philosophie. **IREM de Paris** - Université Paris Diderot. La réforme des programmes des lycées: et alors? Lyon, France. May. 2013, p. 78-88. Disponível em: <hal-00879219>. Acesso em: 02 abr. 2021.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: SEMT/MEC, 2018.

_____. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: SEMT/MEC, 1997.

CARNEIRO, J. P. A geometria e o ensino dos números complexos. **Anais ... VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**, 2004a. Disponível em: <<http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/15/PA07.pdf>>. Acesso em: 05 jul. 2022.

_____. Sobre a Geometria e o Ensino dos Números Complexos. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 55, p. 15-25, 2004b.

CARNEIRO, J. P.; WANDERLEY, A. J. M. Os números complexos e a geometria dinâmica. **BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMATICA**, v. 1, 2002.

CELLARD, A. A análise documental. In: POUPART, Jean *et al.* **A pesquisa qualitativa: enfoques epistemológicos e metodológicos**. Petrópolis, Vozes, 2008.

CLARK, K. *et al.* History of Mathematics in Mathematics Education: Recent developments. **In: Anais ... History and Pedagogy of Mathematics**. Montpellier France. p. 135-179, 2016.

CORSETTI, B. A análise documental no contexto da metodologia qualitativa: uma abordagem a partir da experiência de pesquisa do Programa de Pós-Graduação em Educação da Unisinos. **UNIREVISTA**, v. 1, n. 1, p. 32-46, 2006.

COSTA, M. A. **As ideias fundamentais da matemática e outros ensaios**. São Paulo: Editora da USP, 1971.

DA SILVA, C. M. S. Livro didático mais popular de Leonhard Euler e sua repercussão no Brasil. **RBHM**, v.9, n. 17, p. 33-52, 2009.

DA SILVA, M. A. Da teoria a prática: uma análise histórica do desenvolvimento conceitual dos números complexos e suas aplicações. **Revista Brasileira de História da Ciência**, Rio de Janeiro, v. 4, n. 1, p. 79-91, jan.-jun. 2011.

DA SILVA, H.; BERNARDINO, C. L. À elite, uma terceira natureza de números na Coleção Matemática 2º Ciclo. **Zetetiké**, Campinas. v. 27, p.1-23, 2019.

FONTES, C. A.; MUNIZ, R. dos S. S. Coordenadas polares no ensino médio: contribuições para o ensino e a aprendizagem de trigonometria e números complexos. **In: Anais ... XI Encontro Nacional de Educação Matemática**, 2013. Disponível em: <http://sbem.esquiro.ghost.net/anais/XIENEM/pdf/3540_1977_ID.pdf>. Acesso em: 02 jan. 2021.

FRANÇA, S. M. **Um estudo sobre complementaridades presentes na construção da teoria dos números complexos.** 2017. 181 f. Doutorado (Educação Matemática). Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2017.

GHEDAMSI, I. A micro-model of didactical variables to explore the mathematical organization of complex numbers at upper secondary level. **In: Anais ...** Proceedings of Cerme10. out. 2017. Disponível em: <<https://www.researchgate.net/publication/328043293>>. Acesso em: 17 jul. 2021.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GRIMBERG, G. E. Gauss, os resíduos biquadráticos e a representação geométrica dos números complexos. **RBHM**, v. 14, n. 29, p. 145-166, 2014.

HAZEWINKEL, M. **Isomorphism**, Encyclopedia of Mathematics, Springer, 2001.

HELLMICH, E. W. Números Complexos: A História de $\sqrt{-1}$. In: BAUMGART, J. K. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Álgebra.** Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992. Cap. 11, p. 61-63.

LIRA, A. S. de; BRANDEMBERG, J. C. O conceito de função na teoria das Funções Analíticas de Joseph-Louis Lagrange (1813). **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática.** v. 9, n. 26, p. 141-151, 2022.

LOPES, A. C. M.; CABRAL, V. P. G.; ALVES, F. J. da C. Números complexos na vida real: uma abordagem sobre o ensino e algumas aplicações. **In: Anais ...** VIII Encontro Paraense de Educação Matemática Belém: SBEMPA, 2011. Disponível em: <<http://www.sbempa.mat.br/Boletim/Anais/secoes%5CCCC0103.pdf>>. Acesso em: 14 nov. 2015.

MACHADO, N. J. **A Universidade e a organização do conhecimento:** a rede, o tácito, a dádiva. Estudos Avançados, São Paulo, v. 15, n. 42, 2001.

_____. **Educação: Projetos e Valores.** São Paulo: Escrituras, 2004.

MAOR, E. **e:** a história de um número. 5. ed. Trad. Jorge Calife. Rio de Janeiro: Editora Record, 2008.

MERINO, O. **A Short History of Complex Numbers.** Rhode Island, 2006.

MILES, F. C. P. A Emergência dos Números Complexos. **Revista do professor de Matemática**, n. 24, p. 5-15, 2 sem. 1993.

O'CONNOR, J.; ROBERTSON, E. **Scipione del Ferro.** MacTutor History of Mathematics. University of St. Andrews, 1999.

OLIVEIRA, M. M. **Como fazer pesquisa qualitativa.** Petrópolis: Vozes, 2007.

PUHL, C. S.; LIMA, I. G. de. Interagindo com os Números complexos. **Revista Ensino de Ciências.** v. 5, n.2, p. 834-850, jul./dez. 2014.

ROSA, M. S. **Números Complexos**: Uma Abordagem Histórica para aquisição do conceito. 1998, 170f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, 1998.

SÁ-SILVA, J. R.; ALMEIDA, C. D.; GUINDANI, J. F. Pesquisa documental: pistas teóricas e metodológicas. **Revista Brasileira de História&Ciências Sociais**. Ano 1, n. 1, p. 1-14, jul. 2009.

SCHUBRING, G. Relações entre a História e o Ensino da Matemática. **In: Anais ... Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática e Seminário Nacional de História da Matemática**, p. 157-163. Aguas de São Pedro: São Paulo, Brasil, 1997.

SFARD, A. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. **Educational Studies in Mathematics**, v.22, n.1, p. 1-36, fev. 1991.

SILVA, R. C. da. **Sobre o ensino dos números complexos**: (re)significando conceitos, propriedades e operações por meio de construções e interpretações geométricas. 2008. 186 f. Profissionalizante (Ensino). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

VEAS, V. R; GONZÁLEZ, M. P. Comprensión de los números complejos desde los modos de pensamiento en base a un estudio histórico epistemológico. **In: Anais ... Conference: XVII Jornadas Nacionales de Educación Matemática**, Chile, 2013.

VIANNA, C. R. Usos didáticos para História da Matemática. **In: Anais ... I Seminário Nacional de História da Matemática**. NETO, Fernando Raul (Org). Recife (PE): SBHMat, p. 65-79, 1998.