UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTO SENSU* MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

Explorando o Teorema de Pappus-Guldin: Atividades Experimentais para o Cálculo do Volume de Sólidos de Revolução

Gustavo Stênio Magnago Neitzel
Andreia Aparecida Guimarães Strohschoen
Marli Teresinha Quartieri

Apresentação

Prezado (a) professor (a),

O desafio de manter os estudantes engajados e motivados em sala de aula, especialmente quando se trata do ensino de conceitos matemáticos complexos, é o que nos impulsiona a apresentar este notável produto educacional. Ele é resultado de uma dissertação de mestrado realizada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade do Vale do Taquari - Univates, intitulada "Experimentação, Tecnologias Digitais e o Teorema de Pappus-Guldin: Uma Proposta Pedagógica para o Ensino de Sólidos de Revolução".

Estamos entusiasmados em apresentar a você uma solução educacional diferenciada, que combina uma sequência didática cuidadosamente planejada, com o uso de materiais didáticos manipuláveis e tecnologias digitais. Essa proposta tem como objetivo principal auxiliar seus alunos a compreenderem e aplicarem o teorema de Pappus-Guldin, a fim de determinar o volume de qualquer sólido de revolução.

Essa abordagem tem como base a premissa de que a aprendizagem efetiva ocorre por meio da experimentação e da vivência prática. Ao utilizar uma sequência didática orientada por experimentação, os alunos têm a oportunidade de explorar e manipular materiais didáticos especialmente projetados para facilitar a compreensão dos conceitos. Esses materiais manipuláveis proporcionam uma experiência tangível e concreta, permitindo que os estudantes visualizem e interajam diretamente com os sólidos de revolução.

Além disso, estão inseridos nesse produto educacional tecnologias digitais para potencializar o processo de ensino. Com o auxílio do *software* GeoGebra, os alunos podem construir e explorar virtualmente diferentes sólidos de revolução, manipular suas características e calcular seus volumes de forma instantânea e precisa. Essas ferramentas digitais também possibilitam a realização de simulações e experimentos virtuais, enriquecendo ainda mais a experiência de aprendizado.

Ao adotar essa sequência didática, você proporcionará aos seus alunos uma abordagem integrada, que combina teoria e prática, estimulando o pensamento crítico, a resolução de problemas e a criatividade.

Contextualização

Este material apresenta sugestões de atividades que visam diversificar a abordagem pedagógica dos docentes, por meio da experimentação com materiais concretos manipuláveis e digitais. O estudo foi realizado junto a estudantes do terceiro ano do ensino médio do curso técnico integrado em Química.

No ensino médio, os estudantes enfrentam maiores desafios ao estudarem a geometria tridimensional, devido às relações e conceitos mais complexos em comparação à geometria plana. Nesse contexto, segundo Muniz Neto (2013), de forma informal, a principal diferença entre o estudo anterior da geometria plana e o atual da geometria espacial é a presença de uma dimensão adicional. Em vez de trabalhar sempre em um mesmo plano bidimensional, agora é necessário lidar com todo o espaço tridimensional.

Posto isso, Lima et al. (2016) demonstram preocupação com o ensino do paralelismo na geometria espacial. Enquanto na geometria plana o paralelismo se resume a retas, no plano tridimensional é complicado para os alunos compreenderem que existem retas que não são paralelas nem concorrentes. Além disso, segundo o autor, é necessário ter cuidado com exemplos inadequados, como o uso de folhas de cartolina para representar planos, o que pode levar os estudantes a erroneamente concluírem que a intersecção entre dois planos é um ponto.

Portanto, Muniz Neto (2013) propõe que "A interseção de dois planos distintos e concorrentes é uma reta". Portanto, para Lima et al. (2016), o uso de duas cartolinas para representar dois planos, embora não deva ser descartado como possibilidade, é importante considerar as limitações de certos modelos para o ensino da geometria. Assim, Carvalho (1993, p. 4) destaca a importância da escolha cuidadosa das formas e do material a ser utilizado no ensino da geometria, uma vez que a geometria é uma teoria matemática que busca criar uma abstração de um mundo que faz parte da nossa realidade, e, portanto, as propriedades escolhidas como postulados devem ser verdadeiras e intuitivas em relação aos elementos geométricos básicos.

Nessa ótica, ressalta-se a relevância da investigação matemática, abarcando diferentes conceitos e propriedades, por meio de métodos como a análise de padrões, experimentação e uso de tecnologias, podendo ou não indicar a necessidade de uma demonstração mais formal, conforme apontado por Brasil (2018). Com base nisso, Dantas e Mathias (2017) destacam que, no ensino médio, muitas vezes são ensinados cálculos de volumes desvinculados do cotidiano dos estudantes. Contudo, os autores salientam que o Geogebra, com poucos passos e a aplicação do teorema de Pappus-Guldin, pode auxiliar na determinação do volume de uma lata de refrigerante, cuja capacidade é conhecida pelos estudantes, mas não é comumente abordada nas aulas de matemática.

A importância de ensinar o cálculo do volume usando o Teorema de Pappus-Guldin está intrinsecamente ligada à compreensão aprofundada da relação entre a geometria plana e a geometria espacial. Essa abordagem proporciona aos estudantes uma visão mais abrangente e significativa ao conectarem formas bidimensionais a sólidos tridimensionais. Compreender essa conexão amplia o conhecimento sobre geometria e promove o desenvolvimento de habilidades essenciais de visualização espacial.

Ao aplicar o Teorema de Pappus-Guldin, os estudantes são capazes de visualizar a relação direta entre uma região plana e o sólido gerado a partir de sua rotação em torno de um eixo que não a intersecta. Essa aplicação prática permite aos alunos perceberem como o volume do sólido gerado pode ser calculado de forma eficiente. Logo, Eves (2011), descreve que o volume resultante é igual ao produto da área da região pelo comprimento da trajetória descrita pelo centroide durante a rotação.

Nesse sentido, Lorenzato (2021, p. 7) destaca que "a utilização do Método Didático está sempre intrinsecamente ligada a um processo de ensino que possui uma característica aparentemente paradoxal". Portanto, segundo o autor, é irreal que alguém descreva um objeto sem nunca o ter visto ou manipulado. Em contrapartida, o pesquisador afirma que aqueles que já tiveram contato com certos objetos conseguem ter uma ideia deles, mesmo sem o apoio de atributos inerentes aos objetos. Nesse contexto, em relação ao concreto e ao abstrato, Kopnin (1978, p. 106) explicam:

> No conhecimento, o concreto reflete a unidade, a integridade das diversas propriedades e aspectos multifacetados da realidade. O abstrato, por sua vez, reflete a relativa independência de aspectos isolados desse todo único.

Com base nos conceitos apresentados por Kopnin (1978), Lorenzato (2021) reforça a necessidade de adotar uma abordagem que parta do concreto para o abstrato. No entanto, é importante ressaltar que quando o autor menciona o termo "concreto", ele não se refere somente ao que é real, mas também abrange elementos visuais, como imagens gráficas, por exemplo. Nesse contexto, o pesquisador classifica o real como um subconjunto do concreto.

Diante disso, é fundamental que o professor leve em consideração as mudanças e avanços tecnológicos atuais, a fim de promover uma aproximação com a realidade dos estudantes por meio do uso de recursos tecnológicos. Dessa forma, essa abordagem não deve ser encarada como uma novidade pelo docente, mas sim como uma parte integrante da vida dos estudantes.

Com base nos achados da pesquisa, Lorenzato (2021) salienta que o papel do docente é crucial para o êxito ou fracasso escolar. Nesse contexto, o estudioso ressalta que não é suficiente que a instituição de ensino disponha de materiais didáticos ou laboratório equipado, mas é imprescindível que o professor possua um conhecimento específico para utilizá-lo adequadamente. Tendo em vista a relevância do educador como mediador do processo de aprendizado dos alunos, Lorenzato (2021, p. 7) ilustra sua posição com o seguinte exemplo:

> Tomemos, por exemplo, a representação de um triângulo qualquer, feita com cartolina ou em madeira: com ele, o professor pode mostrar aos alunos, justapondo os três “vértices”, que a “soma dos três ângulos dá 180 graus”. Note que essa atitude de professor, que se resume em apenas apresentar um resultado aos alunos, é um mero reforço à memorização do enunciado matemático que pode ser encontrado nos livros didáticos. No entanto, as consequências do uso do material podem ser mais abrangentes e positivas, se cada aluno desenhar um triângulo qualquer (equilátero, isósceles, escaleno ou retângulo, grande ou pequeno, e em diferentes posições), recortar e dobrar sua figura e mostrar aos colegas suas observações, descobertas ou conclusões.

Nessa perspectiva, torna-se imprescindível compreender a utilização dos materiais didáticos de duas maneiras distintas: a primeira, em que o professor utiliza o material didático apenas para ilustrar um conceito, limitando-se a demonstrá-lo visualmente ao aluno; a segunda, em que o estudante participa ativamente do experimento, manipulando o material didático com o objetivo de alcançar uma solução ou conceito.

Nesse contexto, esse produto educacional possui uma abordagem experimental em todas as suas etapas, desde a apresentação dos sólidos de revolução por meio de uma máquina elétrica giratória, passando pela construção de materiais concretos manipuláveis, até o uso do *software* GeoGebra como uma ferramenta essencial para a determinação do volume de qualquer sólido de revolução.

O GeoGebra, sendo um software de geometria dinâmica interligado ao cálculo algébrico e às funções, proporciona aos estudantes recursos para realizar diversas descobertas. Diante disso, Borba et al. (2020) destacam que ao elaborar uma atividade matemática utilizando tecnologias digitais, busca-se criar atividades com um design experimental.

Com base nisso, apresentamos a seguir um itinerário de atividades experimentais que envolve a observação de sólidos gerados por rotação, a determinação de volumes utilizando materiais concretos manipuláveis em acrílico, a confecção de polígonos em MDF ou papelão com o objetivo de explorar o conceito de centro de gravidade, e a aplicação do teorema de Pappus-Guldin em sólidos de revolução construídos no software GeoGebra.

Resumo das Atividades

Essa seção contém um resumo das atividades a serem desenvolvidas ao longo de seis aulas. Dessa forma, cada encontro terá uma indicação de tempo, objetivo, material didático sugerido e um resumo das atividades planejadas para serem executadas durante cada aula. Essas informações proporcionarão uma visão geral das atividades propostas ao longo dessa sequência didática.

PLANO DE AULA 1
Tempo de aula: Sugestão de 1h40min
Objetivo: Identificar os diferentes tipos de curvas que podem ser usadas para criar sólidos de revolução, como retas, círculos, retângulos, triângulos retângulos e parábolas; entender que um sólido de revolução é criado pela rotação de uma curva em torno de um eixo.
Material didático: Máquina elétrica giratória e atividades escrita.
Atividades a serem desenvolvidas: Apresentar a formação dos sólidos de revolução utilizando a superfície geratriz por meio da máquina elétrica giratória; atividades de fixação contidas no apêndice A.
PLANO DE AULA 2
Tempo de aula: Sugestão de 1h40min
Objetivo: Identificar as diferentes formas de sólidos redondos em acrílico, como cilindros, esferas e cones; aprender a medir as dimensões dos sólidos redondos, como o diâmetro,

altura e raio; utilizar fórmulas matemáticas para calcular o volume dos sólidos redondos; comparar os resultados obtidos experimentalmente com os cálculos teóricos para verificar a precisão das medições.
Material didático: Sólidos geométricos em acrílicos, paquímetro, régua, trena, fita métrica, copo milimetrado, folha de atividade contida no apêndice B.
Atividades a serem desenvolvidas: Realizar experimentos utilizando sólidos de acrílico com o objetivo de determinar o seu volume por meio de fórmulas matemáticas; comparar os resultados obtidos a partir dos cálculos matemáticos com aqueles obtidos através de medições realizadas com água; comprovar a relação entre o volume do cone e do cilindro que possuem mesma base e altura.
PLANO DE AULA 3
Tempo de aula: Sugestão de 1h40min
Objetivo: Compreender o teorema de Pappus-Guldin, que relaciona o volume de um sólido gerado pela rotação de uma área plana em torno de uma reta externa com o produto da área pela distância percorrida pelo centro de gravidade dessa área; compreender o conceito de centro de gravidade, que representa o ponto onde uma região se equilibra sob a ação da gravidade.
Material didático: Polígono em MDF ou papelão, barbante.
Atividades desenvolvidas: Experimento para determinar o centro de gravidade do polígono em MDF ou papelão.
PLANO DE AULA 4
Tempo de aula: Sugestão de 1h40min
Objetivo: Desenvolver habilidades práticas em geometria analítica, como desenhar um plano cartesiano e usar coordenadas para localizar pontos; aprender como determinar o centro de gravidade de um objeto bidimensional usando fórmulas matemáticas; desenvolver habilidades de trabalho em equipe e comunicação, já que serão necessárias discussões e colaboração para completar a tarefa; desenvolver habilidades de resolução de problemas, já que precisarão aplicar conceitos matemáticos para resolver o desafio proposto.
Material didático: Folha de cartolina, régua, polígono em MDF ou papelão.
Atividades a serem desenvolvidas: Para determinar o centro de gravidade de um polígono feito de MDF ou papelão, é necessário realizar cálculos utilizando a geometria analítica. Isso envolve a representação do polígono em um plano cartesiano e a realização dos cálculos adequados para encontrar o ponto em que o peso do polígono está perfeitamente equilibrado.
PLANO DE AULA 5
Tempo de aula: Sugestão de 1h40min
Objetivo: Compreender o conceito de sólidos de revolução, entendendo como eles são gerados a partir da rotação de uma figura plana em torno de um eixo; conhecer as ferramentas do *software* GeoGebra que permitem construir sólidos de revolução; aprender a representar no software GeoGebra as figuras planas que serão usadas como base para construir os sólidos de revolução; desenvolver habilidades para calcular o volume de sólidos de revolução

usando o *software* GeoGebra, a partir da aplicação do teorema de Pappus-Guldin; aprender a manipular e ajustar os parâmetros das figuras planas e dos eixos de rotação para construir diferentes tipos de sólidos de revolução e analisar como as mudanças nesses parâmetros afetam o volume do sólido resultante.
Material didático: Foto do polígono de MDF ou papelão, software GeoGebra.
Atividades desenvolvidas: Na atividade em grupo proposta, os alunos utilizarão o *software* GeoGebra para criar um sólido de revolução a partir de um polígono feito de MDF ou papelão. Além disso, deverão determinar a área desse polígono, encontrar o seu centro de gravidade e, por fim, calcular o volume utilizando o teorema de Pappus-Guldin.
PLANO DE AULA 6
Tempo de aula: Sugestão de 1h40min
Objetivo: Compreender como os sólidos de revolução estão presentes em situações cotidianas, como a fabricação de objetos cilíndricos, e como o software GeoGebra pode ser uma ferramenta útil para a resolução de problemas práticos.
Material didático: Sólidos de revoluções presentes no dia a dia, software GeoGebra.
Atividades desenvolvidas: Para a realização dessa atividade, os alunos devem seguir alguns passos. Primeiramente, é necessário encontrar um sólido de revolução real e registrar uma foto dele. Em seguida, utilizando o software GeoGebra, os estudantes devem construir o mesmo sólido de revolução virtualmente. Por fim, aplicando o teorema de Pappus-Guldin, os alunos deverão calcular o volume do sólido. A apresentação dos resultados da atividade será realizada por meio de um seminário, no qual os grupos apresentarão e explicarão as etapas do processo utilizado para construir e calcular o volume do sólido de revolução.

DESENVOLVIMENTO AULA 1

Para começar, apresente aos alunos os polígonos geratrizes dos sólidos de revolução. Você pode mostrar exemplos desses polígonos em livros didáticos, imagens ou até mesmo criar alguns modelos para exibir em sala de aula. Em seguida, peça que cada aluno escolha um dos polígonos e o coloque na máquina elétrica giratória. Explique que a máquina giratória é uma ferramenta que pode ser usada para criar sólidos de revolução a partir de um polígono geratriz.

Certifique-se de que os alunos entendam como a máquina funciona e que a rotação cria um sólido de revolução ao redor de um eixo de simetria. Incentive-os a experimentar com diferentes velocidades de rotação para ver como isso afeta o resultado.

Um exemplo:

Professor, é hora de questionar os alunos. Vamos lá? Seguem algumas sugestões de questionamentos. No entanto, lembre-se de que a aula é sua professor, e o importante é garantir que os alunos consigam diferenciar sólidos de revolução de superfícies de revolução, além de associar corretamente cada sólido ou superfície de revolução à sua geratriz.

Será que o resultado do giro do polígono pela máquina elétrica giratória é um sólido de revolução?

Qual a diferença entre um sólido de revolução e uma superfície de revolução?

Qual das superfícies planas formaria uma esfera?

Quais as características de um sólido de revolução?

Podemos afirmar que somente o cilindro reto, cone reto e esfera são considerados sólidos de revolução?

Professor, de acordo com as respostas obtidas sobre a existência ou não das superfícies ou sólidos de revoluções, é preciso demonstrar por meio da máquina elétrica giratória que algumas geratrizes formam sólidos de revolução diferentes do cilindro reto, cone reto e esfera.

Um exemplo:

Prezado Professor,

Após a apresentação dos sólidos de revolução por meio da máquina elétrica giratória, é importante verificarmos os resultados por meio de atividades. Com isso em mente, segue algumas atividades escritas para que os alunos possam demonstrar o conhecimento adquirido durante as apresentações dos sólidos de revolução.

Prezado professor,

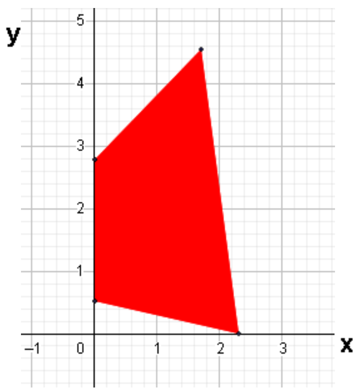
Você sabia que é possível transformar sua sala de aula em um verdadeiro laboratório de descobertas científicas? Mesmo que sua escola não possua a tão desejada máquina elétrica giratória, não há motivo para desanimar! Com a ajuda de motores de torque e outros recursos, é possível construir equipamentos similares e proporcionar aos alunos experiências enriquecedoras.

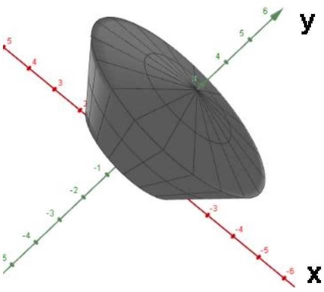
Na dissertação de Pinheiro (2022, p. 92), você encontrará um exemplo prático de como construir seu próprio equipamento. Imagine o entusiasmo dos estudantes ao se depararem com um projeto de construção que desperta a curiosidade, a criatividade e a capacidade de inovação.

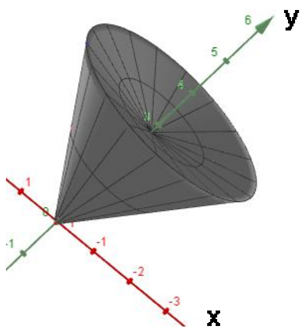
Não deixe a falta de recursos ser um obstáculo para a aprendizagem. Com essas alternativas acessíveis, você poderá levar a ciência para sua sala de aula. Surpreenda seus alunos com a possibilidade de colocarem as mãos na massa e se tornarem verdadeiros cientistas em ação!

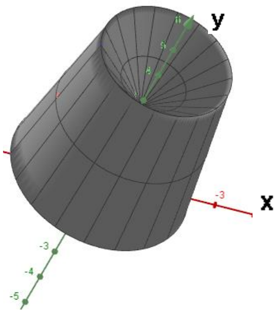
Atividades

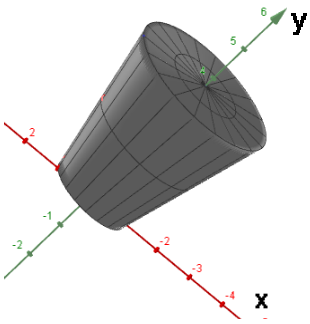
1) Qual é o sólido de revolução gerado pelo polígono abaixo em torno do eixo OY? Forneça uma justificativa escrita para a sua resposta.



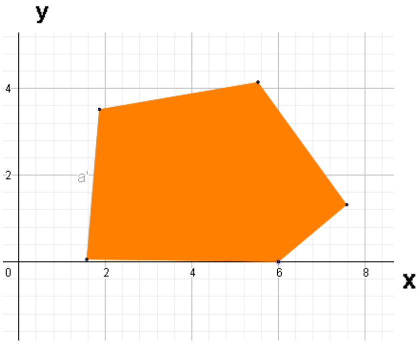


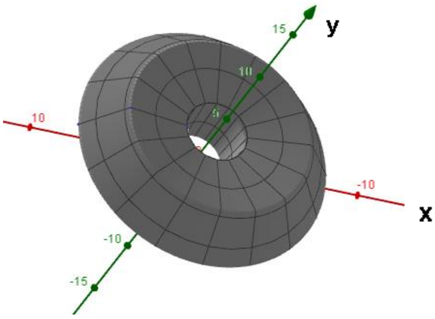


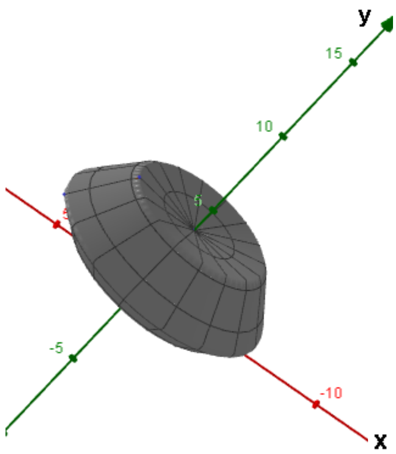


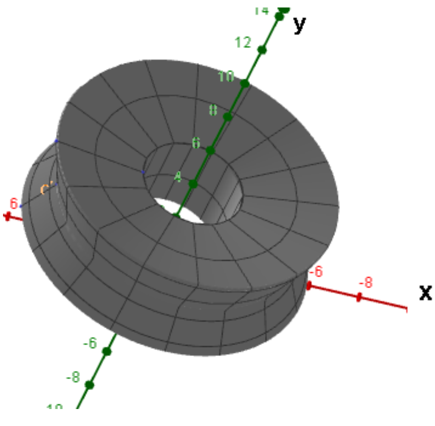


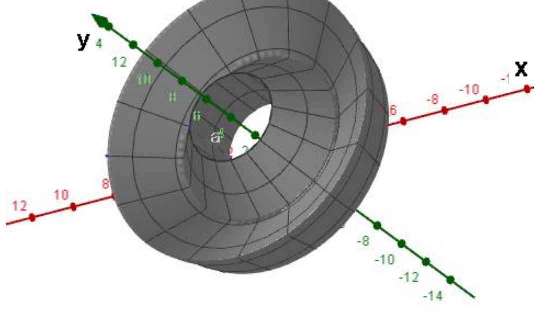
2) Qual é o sólido de revolução gerado pelo polígono abaixo em torno do eixo OY? Forneça uma justificativa escrita para a sua resposta.



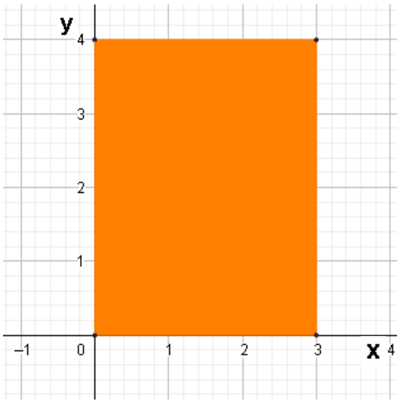


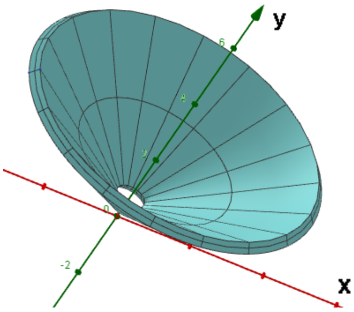


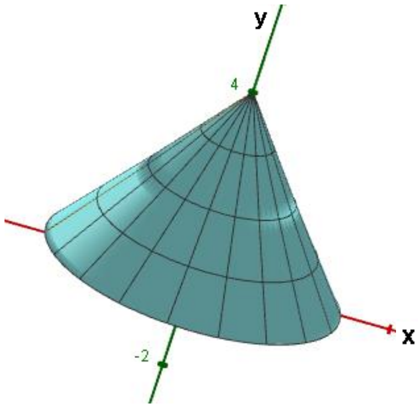


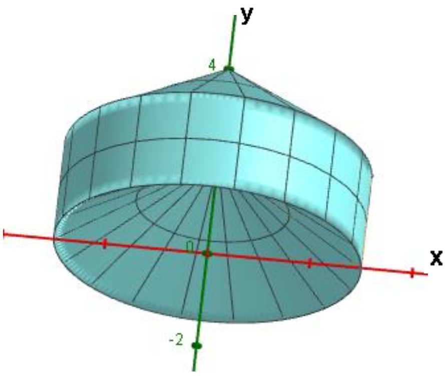


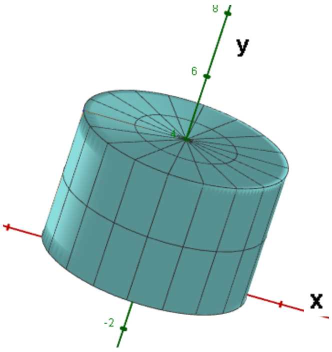
3) Qual é o sólido de revolução gerado pelo polígono abaixo em torno do eixo OY? Forneça uma justificativa escrita para a sua resposta.



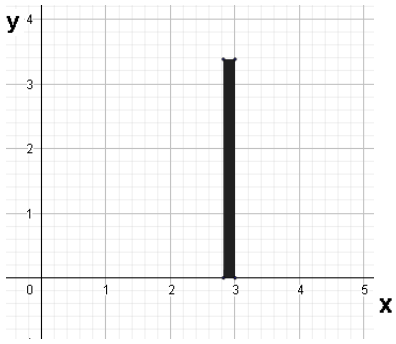


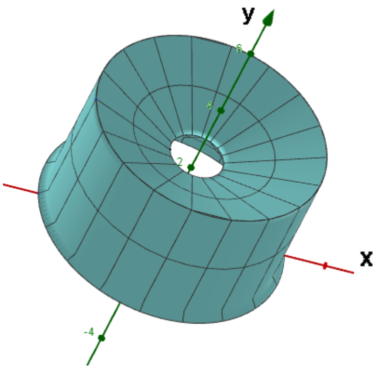


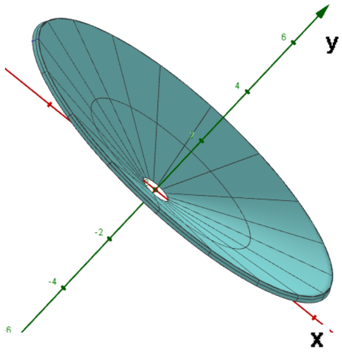


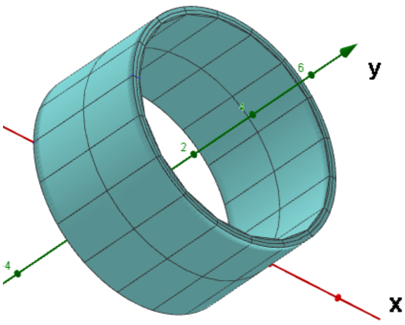


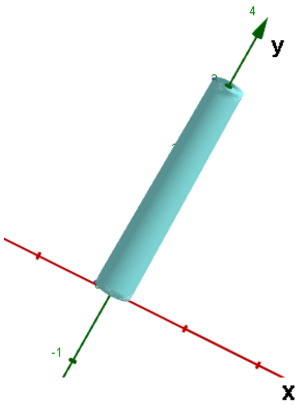
4) Qual é o sólido de revolução gerado pelo polígono abaixo em torno do eixo OY? Forneça uma justificativa escrita para a sua resposta.





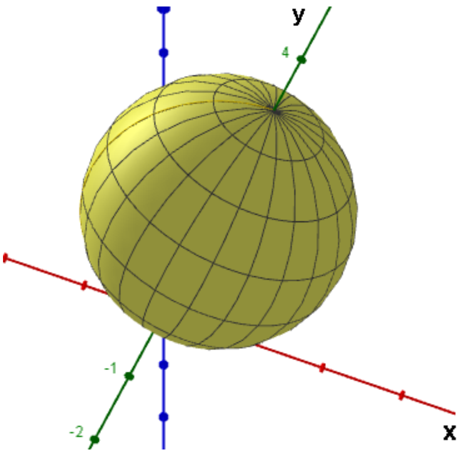


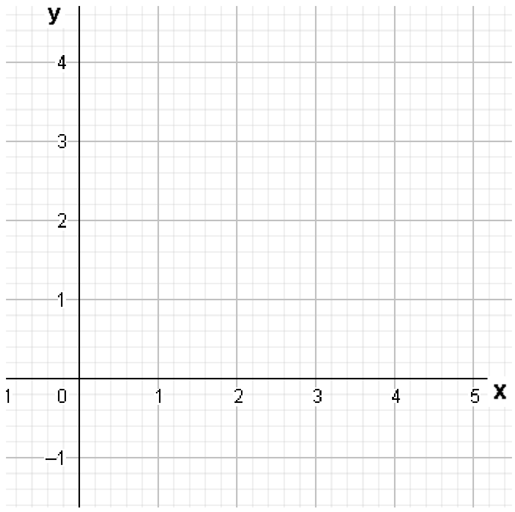




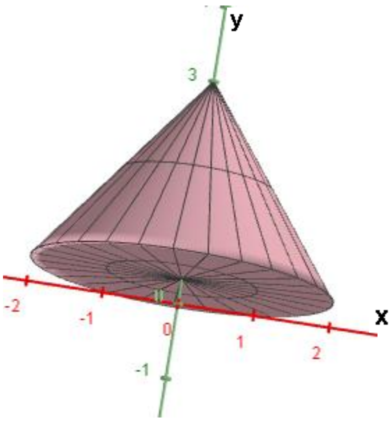
5) Identifique pelo nome os sólidos de revolução a seguir e desenhe a superfície que os gerou.

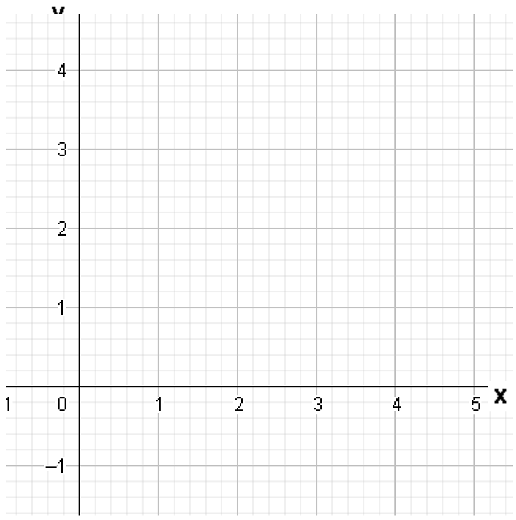
a)

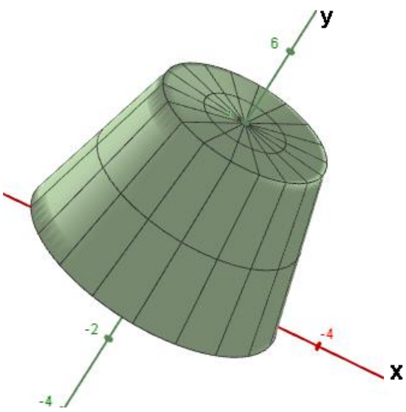


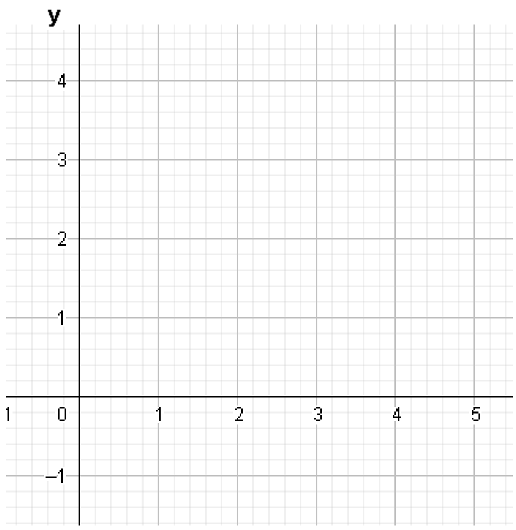


b)



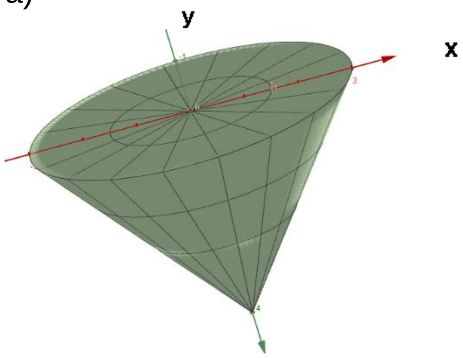




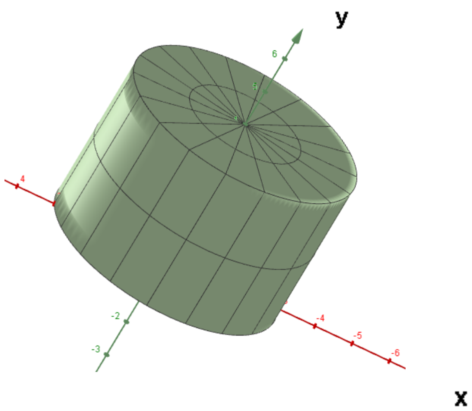


6) Nomeie os sólidos geométricos e identifique o raio, geratriz e altura de cada um, caso exista.

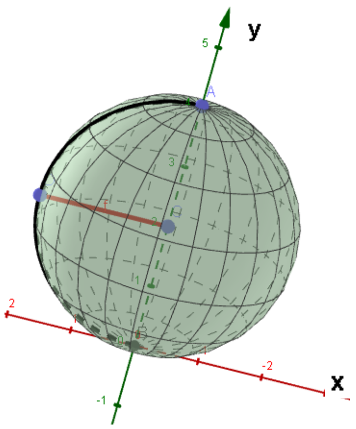
a)



b)



c)



7) Todo sólido Geométrico é um sólido de revolução? Justifique sua resposta.

8) O que você entende sobre sólido de revolução? Descreva.

9) É possível afirmar que o cone, cilindro e esfera são os únicos sólidos de revolução? Justifique sua resposta.

DESENVOLVIMENTO AULA 2

Prezado professor, nesta aula, os alunos irão se reunir em grupos de trabalho para determinar o volume e a capacidade de sólidos redondos feitos de acrílico. Para isso, eles utilizarão instrumentos como trena e paquímetro para medir os sólidos de revolução disponibilizados. É importante destacar que os alunos terão liberdade para obter as medidas necessárias, seja por meio de medições diretas ou por cálculos matemáticos, como o uso do teorema de Pitágoras ou a medida do comprimento da circunferência, para determinar a altura e o raio de sólidos como cone e esfera respectivamente.

Exemplo:

Dessa forma, os grupos de trabalho devem realizar o cálculo dos volumes e capacidades em mililitros. Em seguida, eles deverão utilizar um copo milimetrado com água para preencher os sólidos redondos em acrílico e, assim, comparar os resultados obtidos com os cálculos matemáticos.

Exemplo:

Para finalizar o experimento, os alunos devem comparar os volumes do cilindro e do cone, verificando quantas vezes a capacidade do cone é suficiente para encher o cilindro. Para isso, é importante orientar os grupos a utilizarem água para comprovar essa relação matemática.

Exemplo:

Os resultados obtidos pelos grupos serão compartilhados ao final da aula com todos os alunos, e a partir desses resultados, os grupos devem justificar se a relação do volume do cone é ou não um terço do volume do cilindro, apresentando os motivos pelos quais os resultados foram encontrados.

Nesse sentido, durante os experimentos e no momento de compartilhar os resultados, é sugerido levantar os seguintes questionamentos para promover a coesão e a compreensão dos conceitos:

Os resultados dos volumes obtidos através de cálculos matemáticos foram iguais aos obtidos com a medição utilizando água? Por quê?

Como vocês determinaram a altura do cone e o raio da esfera?

Existe alguma relação entre o volume do cilindro e do cone? Em quais condições essa relação é verdadeira?

É possível afirmar que três cones cabem dentro de um cilindro com a mesma base e altura?

Caro professor, é fundamental ao final desse experimento reforçar a coerência da sequência didática. É importante deixar claro para os alunos que eles utilizaram três fórmulas diferentes para determinar os volumes do cilindro reto, do cone reto e da esfera. Além disso, é relevante lembrá-los de que na aula anterior eles estudaram apenas alguns sólidos de revolução, havendo outros que ainda serão abordados. Portanto, como reflexão para a próxima aula, é necessário discutir quais fórmulas serão utilizadas para calcular os volumes dos demais sólidos de revolução formados a partir da rotação de uma figura plana em torno de um eixo.

DESENVOLVIMENTO AULA 3

Caro professor, para dar início a essa aula, sugiro apresentar aos alunos o teorema de Pappus-Guldin para determinar o volume dos sólidos de revolução, descrito por Eves (2011, p. 228) como:

> Girando uma região plana em torno de um eixo de seu plano, eixo esse que não corta a região, o volume do sólido de revolução assim formado é igual ao produto da área da região pelo comprimento da trajetória descrita pelo centroide da região.

A partir dessa apresentação, sugiro fazer alguns questionamentos aos alunos para que consigam associar o comprimento da trajetória descrita pelo centroide da região com o comprimento da circunferência de raio "r". No entanto, é importante notar que, nesse caso, o raio seria dado pela distância do eixo ao centro de gravidade do polígono.

Vocês têm conhecimento da área da região descrita na fórmula?
Já ouviram falar do centroide, também conhecido como baricentro ou centro de gravidade?
Vocês entendem o que é o comprimento da trajetória descrita pelo centroide da região?
Esse comprimento se assemelha a alguma fórmula conhecida por vocês?

Em resumo, professor, é necessário que os estudantes determinem a área da figura geratriz de qualquer sólido de revolução, bem como seu centro de gravidade, a fim de calcular seu volume. Por isso, é importante aprofundar o conceito físico do centro de gravidade, que muitas vezes é negligenciado e restrito apenas a triângulos, sem uma aplicação prática no cotidiano.

Com base nisso, essa atividade deverá ser realizada em grupos e que, previamente, cada grupo construa polígonos utilizando MDF ou papelão. Dessa forma, durante a aula, eles poderão realizar experimentos para determinar o centro de gravidade de cada polígono.

Inicialmente, professor, solicite aos grupos de trabalho que utilizem as "costas" de um lápis ou caneta para equilibrar o objeto e marcar o local. Isso permitirá que, ao final dessa sequência didática, o objeto seja comparado com outras metodologias.

Exemplo:

Agora que os estudantes possuem um entendimento completo do conceito de centro de gravidade de um polígono, sugiro que realizem um experimento descrito por Lima et al. (2016), com o intuito de determinar o baricentro de uma figura F de maneira prática. O procedimento é o seguinte: Inicialmente, suspendemos a figura por um ponto P1 em sua borda e traçamos uma reta vertical que passa por esse ponto, ou seja, uma reta perpendicular à superfície de suspensão. Em seguida, suspendemos a figura por outro ponto P2 em sua borda e também traçamos uma reta vertical que passa por P2. O ponto de interseção entre essas duas retas é precisamente o baricentro de F.

Exemplo:

Prezado professor, após a realização do experimento, solicite aos alunos que marquem sobre o polígono o segundo ponto que representa seu centro de gravidade. Em seguida, peça aos grupos de trabalho que tentem equilibrar o polígono com a parte de trás do lápis ou da caneta, sobre esse novo ponto marcado, e comparem qual dos dois pontos encontrados durante a aula proporcionou mais equilíbrio ao polígono.

Ao final do encontro, é importante retomar o teorema de Pappus-Guldin no debate e mostrar aos estudantes que o que foi abordado nessa aula foi apenas uma parte desse teorema. Ou seja, é possível determinar o volume de qualquer sólido de revolução por meio desse teorema, desde que se conheça o seu centro de gravidade.

Caro professor, ao final do experimento, reforce com os alunos que o ponto que eles marcaram sobre o polígono pode ser denominado como centroide, baricentro ou centro de gravidade de um polígono. Em seguida, dialogue com os estudantes e procure saber se eles conseguem identificar exemplos do conceito físico do centroide em situações cotidianas.

DESENVOLVIMENTO AULA 4

Caro professor, para dar início a esse encontro, sugiro que coloque o seguinte problema no quadro: determinar a posição do centro de gravidade da superfície do trapézio ABCD, em que os ângulos A e D têm medida de 90º, os lados AB e CD medem 10 e 4, respectivamente, e o lado AD tem medida de 6. Desse modo, alguns questionamentos são essenciais para torna uma resolução participativa, ou seja, os estudantes serão os agentes principais para encontrar o centro de gravidade do trapézio.

Como podemos desenhar o trapézio ABCD, de formar a respeitar as medidas e o ângulo expresso no enunciado?

Vocês conseguem informar onde está o centro de gravidade do trapézio? Seria possível a divisão do trapézio em duas outras figuras?

Onde estaria o centro de gravidade do retângulo? E do triângulo? Como determinar o centro de gravidade do triângulo?

Poderíamos encontrar o centro de gravidade do trapézio pela média aritmética dos centros de gravidades do retângulo e triângulo?

Em qual região vocês acham que o centro de gravidade do trapézio se encontra?

É justo realizar uma média, onde o peso exercido pelo retângulo é diferente do triângulo?

Prezado professor, diante das indagações levantadas, o propósito é calcular a média aritmética ponderada das coordenadas "x" e "y", levando em consideração as áreas das figuras correspondentes onde as coordenadas estão localizadas.

$$x = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_n x_n}{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}$$

$$y = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + \cdots + A_n y_n}{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}$$

A determinação do centro de gravidade de um polígono é um conceito importante na geometria analítica, com aplicações em diversas áreas, como engenharia, arquitetura e design. No caso específico deste texto, o centro de gravidade é relevante para a aplicação do teorema de Pappus-Guldin. Para ilustrar esse conceito em sala de aula, é comum utilizar materiais como MDF ou papelão para criar polígonos e ensinar aos alunos como determinar o centro de gravidade por meio da média aritmética dos baricentros de vários triângulos encontrados no polígono original.

Uma atividade prática que pode ser realizada pelos grupos de trabalho é transcrever o polígono para um plano cartesiano em cartolina, marcando os vértices e traçando os segmentos de reta que representam os lados do polígono. Em seguida, os alunos podem utilizar os conceitos da geometria analítica, como as coordenadas cartesianas, para determinar os baricentros de cada triângulo formado pelos vértices do polígono.

O baricentro de um triângulo é o ponto de interseção das medianas, que são segmentos de reta que ligam um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto. Os alunos podem calcular as coordenadas do baricentro de cada triângulo utilizando a fórmula da média aritmética das coordenadas dos vértices.

Em seguida, os grupos de trabalho podem atribuir pesos aos baricentros dos triângulos de acordo com a área de cada triângulo. A área de um triângulo pode ser calculada utilizando a fórmula de Heron, que envolve o uso das coordenadas cartesianas dos vértices. Com as áreas dos triângulos em mãos, os alunos podem calcular a média aritmética ponderada dos baricentros, onde o peso de cada baricentro é a área do triângulo correspondente.

Ao final da atividade, os estudantes irão utilizar os conceitos da geometria analítica, tais como coordenadas cartesianas, cálculo de área e média aritmética ponderada, para determinar o centro de gravidade do polígono. Essa atividade prática possibilita aos alunos aplicarem de forma concreta os conhecimentos teóricos, tornando o aprendizado mais significativo e estimulante, além de promover o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas, trabalho em equipe e comparação dos resultados com experimentos anteriores, contribuindo assim para a formação integral dos estudantes.

Importante!

Ao final da aula, os grupos de trabalho devem marcar um terceiro centro de gravidade sobre o polígono em MDF ou papelão. É importante incentivar a realização de testes de equilíbrio sobre esse novo ponto e compartilhar as experiências de cada grupo com os demais. Em seguida, solicite que os grupos tirem uma foto do polígono com uma visão de cima, como se fosse um desenho de um polígono no papel, para que a foto possa ser inserida no GeoGebra na aula seguinte. Isso permitirá uma melhor compreensão dos conceitos abordados.

Observação: Atenção com o tempo de aula! A quantidade de vértices dos polígonos em MDFs ou papelões, criados pelos grupos de trabalho, possui uma influência direta na quantidade de trabalho desse experimento.

DESENVOLVIMENTO AULA 5

Estimado professor, esta aula possui caráter experimental e é recomendado que seja conduzida preferencialmente em um laboratório de informática. Nesse sentido, é desejável que os grupos de trabalho disponham de, pelo menos, um computador para cada grupo. Contudo, caso a sua escola disponha de um computador por aluno, seria ainda mais propício, visto que os estudantes poderão dividir tarefas ou sanar dúvidas em outros computadores, a fim de alcançarem uma solução única para o grupo.

Nota Importante!

Apesar de o GeoGebra possuir uma versão disponível para dispositivos móveis, é imprescindível que tais atividades sejam realizadas em um laboratório de informática dotado de máquinas atualizadas, ou seja, *capazes* de apresentar sua interface em 3D sem interrupções (faça testes).

Ademais, cada grupo de trabalho deverá efetuar a inscrição no site do GeoGebra, de forma que os trabalhos sejam salvos em suas respectivas contas, garantindo a disponibilidade para todos.

Outro fator indispensável é que, embora o GeoGebra funcione de forma online, é aconselhável que esta aula seja realizada em computadores nos quais o *software* esteja previamente instalado, a fim de evitar quaisquer interrupções durante o decorrer da aula.

Para criar o sólido de revolução no GeoGebra a partir do polígono em MDF ou de papelão que cada grupo criou, devem-se seguir os seguintes passos:

- Inserção do polígono real: Peça aos alunos que tirem uma foto do polígono real usando a câmera do dispositivo ou digitalizem a foto impressa e a insiram na janela do Geogebra. Eles podem usar a ferramenta "Imagem" no Geogebra para fazer isso. Em seguida, utilizar a ferramenta “polígono” para contornar o objeto da foto.
- Criação do ângulo: Explique aos alunos que eles precisam criar um ângulo de rotação para girar o polígono e formar o sólido de revolução. Peça-lhes que usem a ferramenta "Controle Deslizante" no Geogebra para criar um controle deslizante de um ângulo variável.
- Uso da ferramenta superfície: Instrua os alunos a selecionarem o polígono real inserido e a usarem a ferramenta "Superfície" no Geogebra para criar a superfície de revolução ao redor do eixo. Eles podem usar o ângulo criado no controle deslizante para determinar a extensão da rotação.
- Uso da ferramenta “Girar”: Peça aos alunos que usem a ferramenta "Girar" no Geogebra para girar a superfície de revolução em torno do eixo, com base no ângulo criado no controle deslizante. Eles devem observar como o sólido de revolução é formado à medida que a superfície é girada.
- Exploração do sólido de revolução: Após a construção do sólido de revolução, os alunos podem explorá-lo em 3D usando as ferramentas de navegação do Geogebra, como girar, ampliar e mover a visualização.

Exemplo:

Prezado Professor, após os grupos terem confeccionado o sólido de revolução, é imprescindível que procedam à determinação do seu volume utilizando o teorema de Pappus-Guldin, previamente enunciado em aula anterior. Contudo, uma revisão prévia é sempre recomendada, e nesse momento sugiro alguns questionamentos para fomentar o debate.

É possível determinar a área de um polígono inserido no GeoGebra? E como podemos determinar seu centro de gravidade?

O GeoGebra possui fórmulas que nos permitem determinar o centro de gravidade de um polígono sem marcarmos um ponto sobre um dos três centros de gravidade determinados nas aulas anteriores?

Como podemos determinar a distância do eixo ao centroide? E em caso de mudança de posição ou tamanho do polígono, é necessário determinar todos os valores novamente?

Para determinar o volume do sólido de revolução utilizando o teorema de Pappus-Guldin, os grupos de trabalho deverão seguir os seguintes passos:

- Determinar a área do polígono já inserido na etapa anterior, ou apenas utilizar o nome pré-definido definido pelo *software* (exemplo: pol1).
- Determinar o centro de gravidade do polígono utilizando a ferramenta “centro de gravidade” disponível no GeoGebra.
- Determinar a distância do eixo de rotação ao centro de gravidade do polígono, utilizando a ferramenta “distância (ponto e objeto)”.
- Por fim inserir na entrada o Teorema de Pappus-Guldin e seus respectivos valores já definidos anteriormente.

Exemplo:

Este experimento com o uso do software GeoGebra pode ser adaptado para diversas figuras geométricas planas empregadas na construção de um sólido de revolução no GeoGebra. Com isso, é viável extrair, de um sólido de revolução real inserido no GeoGebra, a figura geratriz de forma proporcional às suas medidas originais. Isso permite a criação de um sólido de revolução no GeoGebra e sua visualização na janela 3D.

DESENVOLVIMENTO AULA 6

Prezado professor, sugerimos que a presente aula, de número seis, seja designada como uma atividade de consolidação dos conceitos aprendidos na aula anterior, ou seja, os grupos de trabalho deverão se reunir em horários distintos ao da aula para executar o experimento e apresentá-lo em formato de seminário. Para tanto, eles deverão executar todas as etapas anteriores, com exceção da construção da linha poligonal, que poderá ser elaborada utilizando a ferramenta "spline", como exemplificado.

Exemplo:

Ademais, constam outras possibilidades de concepção de um sólido de revolução no software GeoGebra. Destarte, sugere-se a apreciação do artigo intitulado "Formas de revolução e cálculo de volume[1]", de autoria de Dantas (2016), no qual é apresentada a utilização das ferramentas de "sequências" para a construção do mencionado sólido. Assim sendo, nessa última atividade, sugere-se disponibilizar aos discentes materiais de pesquisa, a fim de que não se restrinjam unicamente às atividades abordadas em sala de aula anteriormente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao concluir esta sequência de atividades, com base na dissertação que deu origem a este recurso educacional, podemos afirmar que a utilização de materiais concretos manipuláveis e tecnologias digitais no ensino de sólidos de revolução, por meio de atividades experimentais, capacita o aluno a alcançar a abstração, aproximando-se de situações do seu cotidiano. De acordo com Kopnin (1978), o concreto representa a união e a integração de diversas características e aspectos complexos da realidade, enquanto o abstrato evidencia que elementos individuais desse conjunto são independentes entre si.

Dessa forma, as atividades apresentadas neste produto educacional seguem o padrão das que são trabalhadas em sala de aula. No entanto, procurou-se abordá-las de maneira diferente, partindo do concreto para alcançar as abstrações, visando tornar os estudantes mais autônomos e ativos na construção do conhecimento.

É importante ressaltar que as abordagens detalhadas desse produto educacional exigem atenção do professor durante sua aplicação. Nesse contexto, podemos destacar a possível falta de experiência tanto por parte do professor quanto dos alunos no uso de ferramentas manipuláveis e digitais. No

---

[1] Disponível em: https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/view/24428/pdf

entanto, essas dificuldades são inerentes ao processo de ensino, e somente por meio da experiência com as abordagens propostas é que o professor adquirirá mais segurança e expertise.

Outro aspecto relevante a considerar na aplicação dessa sequência didática é o tempo necessário para sua execução, bem como os imprevistos que possam surgir. Embora o planejamento sugira uma duração adequada, é imprescindível ter em mente o perfil dos alunos e seus conhecimentos prévios, visando um melhor aproveitamento do tempo durante a sua aplicação.

Por fim, esperamos que as atividades sugeridas aqui sejam capazes de encorajá-los a incorporar essa abordagem em suas aulas. Além disso, desejamos que essa sequência didática sirva como fonte de inspiração para o surgimento de outras sequências, bem como para aprimoramentos e novas incorporações na mesma.

REFERÊNCIAS

BORBA, Marcelo de Carvalho; SCUCUGLIA, Ricardo Rodrigues da Silva; GADANIDIS, George. **Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática:** Sala de Aula e Internet em Movimento. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CARVALHO, Paulo Cesar Pinto**. Introdução a Geometria Espacial.** 1. ed. Rio de Janeiro, Gráfica Wagner LTDA, 1993.

Dantas, S. C., & Mathias, C. V. (2016). **Formas de Revolução e Cálculo de Volume.** Ciência E Natura, 39(1), 142–155. Disponível em: https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/view/24428/pdf. Acessado em 08 de março de 2023.

EVES, Howard**. Introdução à história da matemática.** tradução Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

KOPNIN, Pavel Vassilyevitc. **A dialética como logica e teoria do conhecimento.** 1. Ed. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio:** Volume 2. 7. ed. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2000.

LORENZATO, Sérgio. **O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** [livro eletrônico]. 3. ed. Campinas: Autores associados, 2021.

MUNIZ NETO, Antônio Caminha. **Geometria.** 1. ed. Coleção Profmat. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2013.

PINHEIRO, Ana Lúcia Vaghetti. **Estudo dos sólidos de revolução com ênfase nos corpos redondos: concepções e práxis de uma sequência didática à luz da teoria de guy brousseau.** Dissertação de mestrado. Disponível em: https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/24401/DIS_PPGMRN_2022_PINHEIRO_ANA.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acessado em 6 de março de 2023.