UNIVATES

UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO

DOUTORADO ACADÊMICO EM ENSINO

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Romildo Pereira da Cruz

Lajeado, dezembro de 2019

UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO
DOUTORADO ACADÊMICO EM ENSINO

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Romildo Pereira da Cruz

Lajeado, dezembro de 2019

Romildo Pereira da Cruz

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino – Doutorado em Ensino, da Universidade do Vale do Taquari - Univates, como exigência parcial para obtenção do grau de Doutor em Ensino, na área de Alfabetização Científica e Tecnológica, na linha de pesquisa Recursos, Tecnologias e Ferramentas no Ensino.

Orientadora: Prof[a]. Dr[a]. Marli Teresinha Quartieri

Lajeado, dezembro de 2019

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

ROMILDO PEREIRA DA CRUZ

Tese apresentada à Comissão Examinadora do Curso de Pós-Graduação em Ensino da Universidade do Vale do Taquari - Univates como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ensino, defendida em 19 de dezembro de 2019. Banca Examinadora constituída pelos professores:

Orientadora: Prof.ª. Dra. Marli Teresinha Quartieri
Universidade do Vale do Taquari - Univates

Membro: Prof.ª. Dra. Ieda Maria Giongo
Universidade do Vale do Taquari - Univates

Membro: Prof.ª. Dra. Maria Madalena Dullius
Universidade do Vale do Taquari - Univates

Membro: Prof.ª. Drª. Ana Marli Bulegon
Universidade Franciscana - UFN

Membro: Prof.°. Dr. João Batista Bottentuit Júnior
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

AGRADECIMENTOS

À minha esposa Zimar Marques Bastos e à minha filha I`reena Takiná Rossi da Cruz, companheiras de todas as horas, que me incentivaram nos momentos mais difíceis. Amor e gratidão são palavras que se associam ao meu sentimento por estas mulheres especiais em minha vida.

À minha orientadora, a professora Doutora Marli Teresinha Quartieri, pelas orientações sempre pertinentes, comentários e sugestões ao longo do trabalho e, principalmente, pela amizade e carinho mútuos construídos nesses anos de parceria.

Aos meus irmãos, dos quais tenho como exemplos a força e a garra para prosseguir e não desistir diante dos percalços.

Aos ex-colegas de Bolsa dos distintos projetos desenvolvidos na universidade, com os quais tive a satisfação de conviver, aqui quero registrar o meu respeito e carinho a todos vocês.

À coordenadora do PPGEnsino, Professora Doutora Ieda Maria Giongo, pelo carinho e incentivo à produtividade.

À Pró-Reitora de Pesquisa, Extensão e Pós-Graduação, Professora Doutora Maria Madalena Dullius

Aos professores, Ana Marli Bulegon e João Batista Bottentuit Júnior membros da banca, externos ao Programa.

A todos os professores do PPGEnsino, que contribuíram para suscitar campos de conhecimentos que ampliaram minha visão acerca dos processos de ensino e de aprendizagem.

À secretária do PPGEnsino, Fernanda Kochhann, sempre atenciosa,eficiente e bem-humorada.

À inestimável amiga Geovana Luíza Kliemann, pela amizade, respeito, companheirismo e parceria.

À amiga Elise Dente pela valorosa consideração e contribuição durante o percurso de desenvolvimento dessa pesquisa.

À PROSUP/CAPES, pelo período de bolsa do qual fiz parte.

À Prefeitura Municipal de Humaitá/SEMED, pelo amparo a essa pesquisa.

A todos aqueles que não foram mencionados por escrito neste espaço, mas estão presentes nas minhas lembranças.

Meus sinceros agradecimentos!

RESUMO

O objetivo dessa pesquisa foi investigar quais características da sequência didática, que considera o uso de variados recursos de ensino, pode favorecer a aquisição e a construção de conhecimentos pelos alunos, viabilizando indícios de aprendizagem significativa das razões trigonométricas no triângulo retângulo. No decurso da investigação participaram 26 alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental da Educação Básica de uma escola privada do município de Lajeado – RS. A investigação foi pautada no desenvolvimento da aprendizagem em situações nas quais foram utilizados variados recursos e estratégias de ensino, a partir da aplicação de uma *sequência didática* embasada nos pressupostos da *Metodologia da Engenharia Didática*, preconizados por Artigue (1996), e nos princípios da *Teoria da Aprendizagem Significativa*, conforme Ausubel (1968, 2000, 2003). A metodologia de investigação se enquadra na abordagem do tipo qualitativa, fundamentada numa experiência de ensino em sala de aula. Os dados emergentes da coleta de dados (testes de conhecimentos (questionários inicial e final), mapas conceituais, observação participativa e entrevista) dos 26 alunos investigados foram analisados à Luz da *Análise Textual Discursiva*. Os resultados da pesquisa nos permitem concluir que os conhecimentos prévios dos alunos influenciaram significativamente no desenvolvimento da *sequência didática*, tornando-a potencialmente significativa. Os resultados também contribuíram para uma nova postura na ação pedagógica do investigador. As atividades norteadas por situações-problema do cotidiano facilitaram a identificação dos princípios de *diferenciação progressiva* e de *reconciliação integradora.* Analisando os resultados emergentes, inferimos, ainda, que as características da *sequência didática* que facilitaram os processos de *diferenciação* e de *reconciliação* pelos alunos em relação ao conteúdo estudado, têm origem e está fundamentada em princípios, como: o uso e o manuseio de material concreto; o uso de recursos; informáticos; a utilização de estratégias de ensino diversas; a proposição de situações-problema; a participação e protagonismo dos alunos.

Palavras-chave: Ensino de Trigonometria. Sequência Didática. Engenharia Didática. Diferenciação Progressiva. Reconciliação Integradora.

ABSTRACT

The objective of this research was to investigate which characteristics of the didactic sequence, which considers the use of varied teaching resources, can favor the acquisition and construction of knowledge by students, enabling learning indications trigonometric ratios in the right triangle. During the research, 26 students from the 9th grade of elementary school of basic education of a private school in the municipality of Lajeado - RS participated. The research was based on the development of learning in situations in which various teaching resources and strategies were used, based on the application of a didactic sequence based on the assumptions of the Didactic Engineering Methodology, advocated by Artigue (1996), and in the principles of the Theory of Meaningful Learning, according to Ausubel (1968, 2000, 2003). The research methodology fits the qualitative approach, based on a classroom teaching experience. The data emerging from data collection (knowledge tests (initial and final questionnaires), conceptual maps, participatory observation and interview) of the 26 students investigated were analyzed in the light of Discursive Textual Analysis. The results of the research allow us to conclude that the students' previous knowledge significantly influenced the development of the didactic sequence, making it potentially significant. The results also contributed to a new attitude in the pedagogical action of the researcher. The activities guided by everyday problem situations facilitated the identification of the principles of progressive differentiation and integrative reconciliation. Analyzing the emerging results, we also infer that the characteristics of the didactic sequence that facilitated the processes of differentiation and reconciliation by students in relation to the content studied, originate and are based on principles, such as: the use and handling of concrete material; the use of resources; information technology; the use of various teaching strategies; the proposition of problem situations; participation and protagonism of students.

Keywords: Trigonometry teaching. Following teaching. Didactic Engineering. Progressive Differentiation. Integrative Reconciliation.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A *trigonometria no triângulo retângulo* é um tema com muitas possibilidades de aplicação na Matemática. Sua origem e desenvolvimento fazem parte da história da evolução do pensamento da humanidade. Sua aplicabilidade em várias áreas do conhecimento científico, envolvendo desde ações do cotidiano, como estimar uma altura inacessível, até estudos de complexidade confere-lhe um *status* privilegiado. Entretanto, com base em nossa experiência docente, o estudo da *trigonometria no triângulo retângulo* na escola, ainda é um tema pouco explorado por professores e, por consequência, minimamente aprendido pela maioria dos alunos.

Mas, o que nos autoriza a tentar colaborar na discussão da aprendizagem significativa das *razões trigonométricas no triângulo retângulo*?

No decurso da nossa vida profissional[1] de mais de duas décadas, temos percebido que os alunos de todos os níveis de ensino apresentam, de maneira geral, dificuldades em assimilar os conceitos trigonométricos. Ciente de que nossa experiência docente, auxiliada por nossa formação[2] acadêmica, corroborada pela construção e desenvolvimento de uma *sequência didática* potencialmente significativa, pode contribuir para a mudança do *status* que persiste em relação à temática, empenhamo-nos em apresentar, nesta tese, uma proposta de mudança

---

[1] Experiência como professor da Educação Infantil; professor da Educação Básica no Ensino Fundamental e Médio; professor da Educação de Jovens e Adultos; professor dos cursos de Engenharia da Universidade Federal do Amazonas – UFAM; professor do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Amazonas – UEA.
[2] Licenciado em Matemática; Especialista em Ensino de Matemática; Mestre em Ensino.

metodológica para a abordagem do tema, usando como referência o 9° Ano do Ensino Fundamental da Educação Básica.

Em face do exposto, ressaltamos a importância de pesquisas anteriormente realizadas, que tentam de alguma forma discutir e elucidar questões que os professores costumam abordar nas escolas para trabalharem o assunto. Das pesquisas, apresentamos as desenvolvidas por Fernandes (2010), Fonseca (2011), Oliveira (2013), Ribeiro (2015), Mascarin (2017), sem citar outras que seguem o mesmo perfil. Todas são unânimes em apontar a falta de sentido das abordagens tradicionais dos processos de ensino e de aprendizagem da *trigonometria no triângulo retângulo*, corroborando assim com as percepções que temos em torno da abordagem da temática.

Com base em seus achados, os autores supracitados sugerem novas formas de ensiná-la, pautadas, principalmente, nas atividades em grupo, reconhecendo a importância da interação na construção do conhecimento. Nas experiências realizadas pelos referidos autores, por meio de atividades compartilhadas, identificamos que a tendência do desenvolvimento dos alunos, sobretudo, da Educação Básica, caminha do social para o individual, sendo o nível mais elevado de participação, aquele em que a colaboração passou a ser o objetivo da própria tarefa. Nesse sentido, o sucesso da aprendizagem escolar dependeria, então, em grande parte, da possibilidade de levar os alunos a realizarem atividades compartilhadas, as quais ativam o desenvolvimento cognitivo e favorecem a aquisição do conhecimento.

Em face do diagnóstico das pesquisas elencadas, buscamos, por meio da proposição de uma *sequência didática,* o envolvimento dos alunos em situações que os colocassem na condição de protagonistas das ações de construção desenvolvidas, contribuindo assim para sua aquisição de conhecimentos. Neste contexto, nos perguntamos: porque a proposição de uma *sequência didática* para o ensino e a aprendizagem das *razões trigonométricas no triângulo retângulo*?

A resposta mais simples que poderíamos dar é que o material que construímos e propomos se diferencia dos demais encontrados na literatura, dadas a abrangência do número de recursos e estratégias de ensino propostos. Preocupado em apresentar uma proposta metodológica que mesclasse variados contextos, diferente de pesquisas realizadas sobre a temática que focam, sobretudo, em “como” o aluno resolve um conjunto de questões e se ele utiliza os algoritmos corretos, apresentamos em nossa investigação indícios de como eles estruturam cognitivamente os processos de *diferenciação progressiva* e de *reconciliação integradora*, conceitos amplamente discutidos na perspectiva da *Teoria da Aprendizagem Significativa* de Ausubel. Nessa seara, ainda respondemos à nossa questão de pesquisa, que está relacionada com as características fundamentais que uma *sequência didática* deve ter para identificar os avanços, os retrocessos e as formas como os processos cognitivos estão interligados e se retroalimentam.

Para essa investida, tivemos como motivação pessoal as nossas inquietações acerca das possibilidades de poder proporcionar melhorias na qualidade do ensino das *razões trigonométricas no triângulo retângulo*, essa, foi corroborada pelo aceite no Programa de Pós-graduação em Ensino – PPGEnsino, da Universidade do Vale do Taquari – Univates, a partir do qual, vislumbramos a oportunidade de desenvolver um trabalho de pesquisa que envolvesse a relação entre os processos de ensino e de aprendizagem. Nessa tese, especificamente, a relação entre os campos do ensino da Matemática e da aprendizagem intercruzam-se, sobretudo, em busca de posturas didático-pedagógicas que valorizem as múltiplas maneiras de analisar diversos problemas e encontrar formas diferenciadas (não lineares) para solucioná-los.

Outra motivação para a pesquisa teve como referência as ações desenvolvidas dentro do grupo de pesquisa Tendências no Ensino – Universidade do Vale do Taquari - Univates. Cabe referir que o foco investigativo do grupo está vinculado às linhas de pesquisa: Formação de Professores, Estudo do Currículo e Avaliação; Recursos, Tecnologias e Ferramentas no Ensino. Nesta última linha, na qual se espelha nossa investigação, o grupo apresenta uma substancial produção: formações para professores, oficinas (com foco em atividades experimentais e uso de recursos tecnológicos desenvolvidas com professores e alunos, da Educação Básica), artigos e livros[3]. As conclusões das investigações desenvolvidas pelos

[3] Atividades experimentais de ciências exatas para os anos iniciais (2017) - https://www.univates.br/editora-univates/publicacao/229. Aproximando a Matemática e a Física por meio de recursos tecnológicos: Ensino Médio (2016) - https://www.univates.br/editora-

pesquisadores (professores, estudantes de graduação e pós-graduação) participantes do grupo corroboram nossa percepção de que o uso de recursos[4] diversificados para o ensino proporciona melhorias na apreensão de determinados conteúdos matemáticos.

Em virtude da recorrência e do uso diversificado de recursos de ensino utilizados nas salas de aula, que têm por base estimular o aluno a querer aprender, estimamos um substancial crescimento da usabilidade de tais ferramentas, sobretudo na Educação Básica em todas as regiões do país. Essas mudanças, principalmente de caráter metodológico, por parte dos professores nos levam a refletir sobre dois problemas na aprendizagem que afetam os aprendizes, que, são: o conhecimento inerte, no qual os alunos adquirem um conhecimento não acessível e que não podem utilizar de forma adequada, e a aprendizagem passiva, na qual os alunos se engajam numa ação autodirigida e intencional, mas sem sentido ou objetivos claros a serem atingidos por eles.

Na perspectiva de superar os problemas mencionados, a *sequência didática* que propomos procurou proporcionar aos alunos condições para compreenderem as *razões trigonométricas no triângulo retângulo,* usando diferentes recursos de ensino. O cuidado na elaboração e seleção das atividades, bem como, da escolha dos recursos de ensino utilizados visou à estruturação de um ambiente de ensino com potencial para a promoção de condições para a aprendizagem significativa, que está ao alcance de alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental da Educação Básica, na disciplina de Matemática.

Nesse sentido, imaginamos a disponibilidade da *sequência didática* aplicada à*s razões trigonométricas no triângulo retângulo,* embasada na concepção de que a utilização de diferentes recursos de ensino pode não favorecer pura e simplesmente a identificação de indícios de aprendizagem significativa, tampouco, assegurar percepção de curiosidade e de imaginação dos estudantes. Portanto, nessa tese,

---

univates/publicacao/191. Brincando e aprendendo matemática (2015) - https://www.univates.br/editora-univates/publicacao/143. Atividades experimentais para o ensino de Ciências Exatas (2015) - https://www.univates.br/editora-univates/publicacao/142. Explorando a matemática com aplicativos computacionais: anos iniciais do ensino fundamental (2015) - https://www.univates.br/editora-univates/publicacao/144. Aprender experimentando (2014) - https://www.univates.br/editora-univates/publicacao/117. Explorando a matemática com aplicativos computacionais: anos finais do ensino fundamental (2014).

[4] Nessa escrita, os termos **recursos** e **tecnologias de ensino** serão tomados como sinônimos.

especificamente, nossas inquietudes implícitas ao processo nos levaram ao seguinte questionamento:

Quais características da *sequência didática* facilitam os processos de *diferenciação progressiva* e *reconciliação integradora* dos conceitos das *razões trigonométricas no triângulo retângulo*?

Para construir argumentos que ensejassem resposta à nossa questão norteadora, recorremos à utilização de uma sequência didática e de recursos e estratégias de ensino diversificadas, a citar: o uso da *internet*, aparelhos celulares, computadores, *tablet*, aplicativos *(Bubb.us, WhatsApp), software GeoGebra*, projeção de *slides*, atividades exploratórias, atividades experimentais, leitura de textos, aula expositiva dialogada e aula de campo. Nessa perspectiva, o objetivo central da pesquisa foi **investigar quais características da *sequência didática,* que considera o uso de variados recursos de ensino, pode favorecer a aquisição e a construção de conhecimentos pelos alunos, viabilizando indícios de aprendizagem significativa das *razões trigonométricas no triângulo retângulo*.**

A busca por uma abordagem pedagógica que permitisse a superação de algumas barreiras nos processos de ensino e de aprendizagem fez-nos presumir a necessidade de organizar as atividades da *sequência didática* de forma que os tópicos mantivessem-se uma relação de proximidade. Inferimos que dessa maneira facilitar também o encadeamento da aprendizagem dos alunos.

Estabelecido o ordenamento, apresentamos os objetivos específicos considerados relevantes e que nos auxiliaram na busca por obtenção de respostas ao nosso questionamento. Nesse contexto, procuramos relacioná-los à questão principal e ao objetivo geral, a fim de permitir a compreensão de um conjunto de elementos que se inter-relacionam e que emergem do atual cenário educacional em relação ao ensino da Matemática e à aprendizagem significativa.

1. Identificar os conhecimentos prévios dos alunos participantes da pesquisa, visando nortear o encadeamento da *sequência didática*.

2. Investigar como o uso de variados recursos de ensino pode alterar a percepção dos alunos, desencadeando novos sentidos, significados, que potencializem os processos de aquisição e de construção de conhecimento significativo.

3. Analisar os indicativos de *diferenciação progressiva* e de *reconciliação integradora*, relacionados ao tema abordado na *sequência didática*.

Explicitada nossa questão de pesquisa e os objetivos, antecipamos que a avaliação do grau de *diferenciação progressiva* e de *reconciliação integradora* dos conceitos presentes na estrutura cognitiva dos aprendizes foi possível por meio de mapas conceituais auxiliados por dois testes de conhecimentos (questionários), um aplicado no início e o outro no final da intervenção, que durou 22 períodos de 50 minutos cada um. Porém, para que as informações refletidas nesses instrumentos fossem entendidas como advindas de um processo de aprendizagem significativa, foi preciso recorrer à observação participativa, à entrevista, a registros fotográficos e a áudios.

Dessa maneira, apresentados os principais aspectos norteadores da investigação, apresentamos a estrutura organizacional da tese, constituída de 6 Capítulos.

No Capítulo 1, trazemos a introdução do trabalho, situando os elementos componentes de nossa investigação: as motivações, a teoria de ensino envolvida, a questão de pesquisa, os objetivos, a opção metodológica e a metodologia de análise. No Capítulo 2, abordamos a caracterização da *Teoria da Aprendizagem Significativa,* assumida conforme as construções teóricas de David Ausubel (2003), bem como, a visão de outros teóricos que contribuem para o entendimento de aspectos relativos ao ensino e à aprendizagem em ambientes escolares, entre os quais, Moreira (1997, 1999, 2000, 2006, 2009) e Novak (1977, 1981, 2002, 2010). Esses autores constituem parte da fundamentação teórica deste trabalho. Na sequência, abordamos a interface da *sequência didática;* as influências dos recursos de ensino para uma aprendizagem significativa; o triângulo retângulo e a trigonometria; e, por fim, inferimos a importância de outras pesquisas já realizadas, constituindo o estado da arte.

No Capítulo 3, discutimos a opção pela metodologia qualitativa. Nesse capítulo, aludimos aos fundamentos que nortearam a investigação, tendo por base as orientações metodológicas de Artigue (1996) e Pais (2011) sobre *a Metodologia da Engenharia Didática;* e de Moraes e Galiazzi (2016) sobre a *Análise textual discursiva*. Também apresentamos como foi planejada e executada a *sequência didática* e quais foram os participantes da ação investigativa.

No Capítulo 4, tratamos exclusivamente da análise da nossa experiência de ensino, discutindo, a partir dos dados e resultados levantados, possíveis respostas aos nossos objetivos e à questão da pesquisa. No Capítulo 5, apresentamos algumas considerações e resposta à questão de pesquisa. Ainda, destacamos algumas recomendações a pesquisadores, que, no futuro, desejem ampliar o leque de possibilidades de trabalhar com o conteúdo, visando à aprendizagem significativa dos alunos. No Capítulo 6 seguinte, apresentamos o referencial que subsidiou o desenvolvimento da pesquisa, assim como, os apêndices e anexos que a complementam.

A TEORIA DE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

A *teoria da assimilação da aprendizagem e retenção significativas* ou *Teoria da Aprendizagem Significativa* de David Paul Ausubel (1918-2008) enquadra-se na perspectiva cognitivista-construtivista, sendo amplamente discutida desde a década de 1960. Ao contrário do que propõe o comportamentalismo que, aplicado ao ensino, acaba "promovendo o treinamento ao invés da educação, a aprendizagem mecânica ao invés da significativa" (MOREIRA, 2009, p. 11), a perspectiva cognitivista considera que "a experiência consciente diferenciada e claramente articulada (por exemplo, conhecer, compreender, raciocinar, etc) fornece os dados mais significativos para a ciência psicológica" (AUSUBEL, 2003, p. 42). Nessa perspectiva, ao deixar de lado as relações estímulo-resposta, as preocupações voltam-se para "[...] o aprender a pensar e o aprender a aprender" (MOREIRA, 2011[a], p. 5).

Para Costa (2010), os posicionamentos de Ausubel têm sido defendidos por Novak como um movimento que inspira profunda reflexão sobre o que é ensinar e aprender, particularmente, em contextos escolares de sala de aula, em que a aprendizagem verbal é dominante, mas não exclusiva. Vários são os episódios que acontecem em sala de aula, que, de acordo com Peña et al (2005, p. 65), estão centrados em alguns elementos primordiais: o ensino, que cabe ao professor; e a aprendizagem, em que o aluno é protagonista, tendo em vista o caráter idiossincrático. Penã et. al. (2005) citam ainda o conhecimento como um terceiro elemento, que permeia a relação entre os demais. Esse conjunto de afirmações evidencia que tanto o ensino quanto a aprendizagem dependem de diversos aspectos que precisam estar em sintonia. A maneira como o conhecimento permeia a relação entre professor e aluno pode levar a distintos resultados. De acordo com Tenfen (2011), no caso da aprendizagem significativa, o professor exerce papel fundamental na estruturação de materiais e conteúdos de aprendizagem, logicamente, organizados. Ou seja, o docente é essencial para garantir que “o material aprendido seja potencialmente significativo – principalmente incorporável à sua (do aluno) estrutura de conhecimento através de uma relação não arbitrária e não literal” (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p. 34). Contudo, a disposição do aprendiz em aprender significativamente é condição preponderante, uma vez que

> [...] independentemente da quantidade de potenciais significados que pode ser inerente a uma determinada proposição, se a intenção do aprendiz for memorizá-la de forma arbitrária e literal, i.e., como uma série de palavras relacionadas de forma arbitrária e inalterável, quer o processo de aprendizagem, quer o resultado desta devem ser necessariamente memorizados e sem sentido (AUSUBEL, 2003, p. 56).

Para Costa (2012), a perspectiva cognitivista de Ausubel (1963), divulgada a partir da obra *The Psychology of Meaningful Verbal Learning* (Psicologia da Aprendizagem Verbal Significativa), atualizada em 2000 pelo autor, com o título *The acquisition and retention of knowledge: A cognitive view,* reafirma os principais pressupostos nos quais a teoria está ancorada. Nesta obra, Ausubel (2003) reitera a atualidade da sua teoria, ao mesmo tempo em que destaca as principais variáveis e processos psicológicos envolvidos na aprendizagem e na retenção significativa, visando à criação de novos significados pelo aprendiz.

Dessa forma, organizamos a estrutura do capítulo da seguinte forma: na seção 2.1, abordamos a visão de aprendizagem significativa a partir da visão cognitivista de Ausubel; em 2.2, destacamos a *Engenharia Didática* e a *Sequência Didática*; na seção 2.3, apresentamos um retrato teórico da influência dos recursos de ensino para a aprendizagem significativa; na seção 2.4, apresentamos um recorte histórico acerca da evolução conceitual do triângulo retângulo e da trigonometria; por fim, em 2.5, trazemos o estado da arte com pesquisas já realizadas que ajudam a alicerçar e a embasar o contexto aqui investigado.

2.1 A Teoria de Aprendizagem Significativa

Na concepção de Ausubel (2003), a *teoria da aprendizagem significativa* tem como princípio o fato de que novas ideias expressas de forma simbólica se relacionam com aquilo que o aprendiz já sabe, de forma não arbitrária e não literal. Já o produto dessa interação ativa e integradora é o surgimento de um novo significado, que reflete a natureza substantiva e denotativa desse produto interativo (AUSUBEL, 2003). Embora o princípio da *teoria da aprendizagem significativa* pareça simples, algumas questões relevantes são levantadas por Novak (1981) no que diz respeito à determinação do que o aluno já sabe.

Ausubel (2003) enfatiza que nesse tipo de aprendizagem, o fator determinante do processo da aprendizagem é o *conhecimento prévio*. Segundo o autor, a partir da formação dos *subsunçores,* constitui-se uma rede hierarquizada de ligações entre informações ancoradas e novos conhecimentos apresentados, que se diferenciam e se integralizam. Ainda, conforme Ausubel (2003), essa rede resulta em um processo psicológico que envolve a "interação entre ideias culturalmente significativas, já 'ancoradas' na estrutura cognitiva *particular* de cada aprendiz e o seu próprio mecanismo mental, para aprender de forma significativa" (AUSUBEL, 2003, p. 7).

Ausubel (2003) ainda reitera que essa estrutura, organizada hierarquicamente, compreende um complexo de informações presentes na mente do aprendiz, levando-o à ampliação de uma informação já armazenada, a partir da interação entre conhecimentos, o que pode incorrer numa aprendizagem significativa. Em consonância com Ausubel, Moreira (1999) salienta que, desse modo, a estrutura cognitiva significa um sistema hierárquico de conceitos, que são representações resultantes de experiências sensoriais do indivíduo e do processamento mental da informação recebida. Tal processamento pode ser evidenciado em três formas de aprendizagem significativa: subordinativa, superordenada e combinatória.

Inferimos que a ocorrência da *aprendizagem subordinativa* ocorre em função da interação das novas informações com os *subsunçores*. Ou seja, novos conceitos, ideias ou proposições são aprendidos como subordinados àqueles mais gerais e inclusivos já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz. Como exemplo, poderíamos citar o conceito de trigonometria, que é um conceito geral, e, subordinados a ele, podem estar os conceitos de triângulo, triângulo retângulo, etc. De acordo com Ausubel (2003), a *aprendizagem subordinativa* pode manifestar-se de duas maneiras: derivativa, no caso de um novo conhecimento ser entendido como exemplo específico de um *subsunçor*; ou correlativa, quando o novo conhecimento passa a ser uma extensão ou modificação do conceito prévio a ele relacionado.

A *aprendizagem superordenada* "ocorre no curso do raciocínio ou quando o material apresentado é organizado indutivamente ou envolve a síntese de ideias compostas" (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p. 49). Ou seja, nesse tipo de aprendizagem, enquadram-se as informações aprendidas que são mais amplas, geradoras de diversas ideias. Por exemplo, o conceito de trigonometria e de triângulo.

Em se tratando de *aprendizagem combinatória,* localizam-se as ocorrências em que "[...] uma proposição potencialmente significativa não pode ser relacionada a ideias superordenadas ou às subordinativas na estrutura cognitiva do aluno, mas é relacionável a um conjunto de conteúdos relevantes a esta estrutura" (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p. 33). Um exemplo claro de aprendizagem combinatória está relacionado aos conceitos de trigonometria e de triângulo. Em um curso inicial de Matemática Básica, aprendem-se os conceitos de trigonometria e de triângulo, que, apesar de não serem definidos precisamente, podem ser compreendidos à medida que se fala nas relações. A aprendizagem dessa equivalência não implica subordinar o conceito de triângulo retângulo ao de trigonometria, nem o contrário. O conceito de trigonometria também não é uma generalização do conceito de triângulo e vice-versa. Assim, a equivalência trigonometria-triângulo retângulo implica uma aprendizagem combinatória desses dois conceitos.

Em razão do contexto apresentado pelos autores, podemos inferir que a aprendizagem proposicional é, incontestavelmente, de subsunção ou combinatória. De acordo com Ausubel (2003), a aprendizagem proposicional é própria da situação que prevalece na aprendizagem por recepção, quando se apresentam proposições substantivas ao aprendiz, de quem apenas se exige que apreenda e recorde o significado de tais proposições. Contudo, “é importante ter-se em conta que a aprendizagem proposicional é também um tipo principal de resolução de problemas verbais ou aprendizagem pela descoberta” (AUSUBEL, 2003, p. 21).

De acordo com o autor (2003), as variedades por recepção e pela descoberta da aprendizagem proposicional estão envolvidas sucessivamente, em fases diferentes, no processo de resolução de problemas. Nessa linha, Moreira (2010, p. 13) defende que,

> [...] uma vez descoberto o novo conhecimento, as condições para a aprendizagem significativa são as mesmas: conhecimento prévio adequado e predisposição para aprender. Exceto em crianças pequenas, a aprendizagem por descobrimento não é condição para aprender de maneira significativa. De um modo geral, não é preciso descobrir para aprender significativamente. É um erro pensar que a aprendizagem por descoberta implica aprendizagem significativa. Adultos, e mesmo crianças já não tão pequenas, aprendem basicamente por recepção e pela interação cognitiva entre os conhecimentos recebidos, i.e., os novos conhecimentos e aqueles já existentes na estrutura cognitiva. Seria inviável para seres humanos aprender significativamente a imensa quantidade de informações e conhecimentos disponíveis no mundo atual se tivessem que descobri-los.

Nesse sentido, consideramos que o acesso à aprendizagem significativa, não é algo imbricado diretamente no processo de aprendizagem por descoberta, assim como uma aprendizagem mecânica não é impreterivelmente resultado de um processo de aprendizagem receptiva. De acordo com Moreira (2010), a aprendizagem é, em si, consequência da estratégia de ensino. Assim, tanto a aprendizagem receptiva como a aprendizagem por descoberta podem ser significativas ou mecânicas, dependendo das condições em que ocorrem (MOREIRA, 2010).

De acordo com Moreira (2010, p. 13), “[...] a ‘recepção’ do novo conhecimento pode ser, por exemplo, através de um livro, de uma aula, de uma experiência de laboratório, de um filme, de uma simulação computacional, de uma modelagem computacional, etc”. Nessa linha argumentativa, Moreira (2010) e Ausubel (2003) explicitam que aprender receptivamente significa que o aprendiz não precisa descobrir para aprender. Mas, segundo os autores, isso não implica passividade. Ao contrário, a aprendizagem significativa receptiva requer atividade cognitiva para relacionar, interativamente, os novos conhecimentos com aqueles já existentes na estrutura cognitiva, envolvendo processos de captação de significados, ancoragem, diferenciação progressiva e reconciliação integradora (MOREIRA, 2010). Nessa tese, a diferenciação e a reconciliação serão os elementos norteadores para a validação da ocorrência de aprendizagem significativa das *razões trigonométricas no triângulo retângulo* por meio da *sequência didática* validada.

Ao abordarem o tema da *diferenciação progressiva* e da *reconciliação integradora*, Ausubel, Novak e Hanesian (1980, p. 103) destacam que, “quando se submete uma nova informação a um determinado conceito ou proposição, a nova informação é aprendida e o conceito ou proposição inclusiva sofre modificações”. Esse processo de modificação é chamado de *diferenciação progressiva* e é característico da aprendizagem subordinativa.

Corroborando com a asserção, Moreira (1997) enfatiza que a *diferenciação progressiva* é o princípio pelo qual os conceitos mais gerais e inclusivos do conteúdo de ensino devem ser apresentados, no início, aos alunos, e, progressivamente, diferenciados em termos de detalhes e especificidades. Em corroboração a Moreira (1997), Ausubel (2003, p. 166) destaca:

> Quando se programa a matéria de acordo com o princípio de diferenciação progressiva, apresentam-se, em primeiro lugar, as ideias mais gerais e inclusivas da disciplina e, depois, estas são progressivamente diferenciadas em termos de pormenor e de especificidade.

De acordo com Ausubel (2003), essa ordem de apresentação do conteúdo precisa corresponder, presumivelmente, à sequência natural de aquisição de consciência cognitiva e de satisfação, quando somos expostos a determinados conhecimentos. Para justificar a abordagem, Ausubel (2003, p. 166) apresenta dois pressupostos:

> (1) é menos difícil para os seres humanos apreenderem os aspectos diferenciados de um todo, anteriormente apreendido e mais inclusivo, do que formular o todo inclusivo a partir das partes diferenciadas anteriormente aprendidas; e (2) a organização que o indivíduo faz do conteúdo de uma determinada disciplina no próprio intelecto consiste numa estrutura hierárquica, onde as ideias mais inclusivas ocupam uma posição no vértice da estrutura e subsumem, progressivamente, as proposições, conceitos e dados factuais menos inclusivos e mais diferenciados.

Nesse sentido, pensamos o cérebro do aprendiz como um mecanismo de transformação e de armazenamento, o qual está associado à aquisição e à organização de novos conhecimentos na estrutura cognitiva, espontaneamente, em conformidade com o princípio da diferenciação progressiva. Assim, parece razoável supormos que maior aprendizagem e retenção ocorrem quando os professores ordenam, propositadamente, a organização e a disposição sequencial de conteúdos, seguindo linhas semelhantes. Tal argumento encontra respaldo nas palavras de Moreira (2010, p. 6), ao salientar que

> A diferenciação progressiva é o processo de atribuição de novos significados a um dado subsunçor (um conceito ou uma proposição, por exemplo) resultante da sucessiva utilização desse subsunçor para dar significado a novos conhecimentos.

Moreira (2010), devemos lembrar que a aprendizagem significativa decorre da interação não arbitrária e não literal de novos conhecimentos com conhecimentos prévios (*subsunçores*) especificamente relevantes. Através de sucessivas interações, um dado *subsunçor* vai, progressivamente, adquirindo novos significados, vai ficando mais rico, mais refinado, mais diferenciado e mais capaz de servir de ancoradouro para novas aprendizagens significativas, que terá como ápice a reconciliação integrativa (MOREIRA, 2010).

Na mesma linha argumentativa Ausubel, Novak e Hanesian (1980, p. 104) afirmam que, em certos casos, “os elementos existentes na estrutura cognitiva podem assumir uma nova organização e, portanto, novo significado”. Para os autores, a recombinação dos *subsunçores* implica significados mais abrangentes, que estão diretamente relacionados à *reconciliação integradora*.

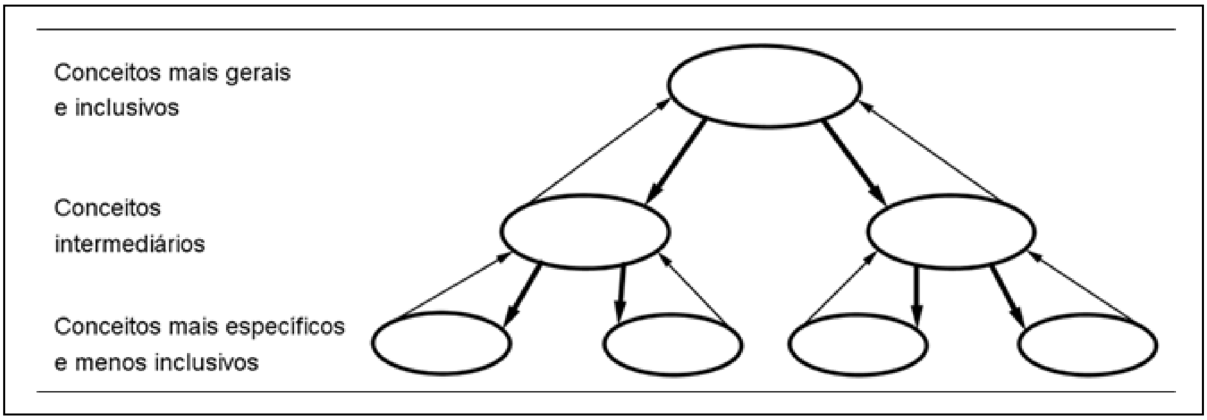
A *reconciliação integradora* ou integrativa é um processo da dinâmica da estrutura cognitiva, simultâneo ao da *diferenciação progressiva*, que consiste em eliminar diferenças aparentes, resolver inconsistências, integrar significados, fazer superordenações (MOREIRA, 2010). Para o autor, a *diferenciação progressiva* e a *reconciliação integradora*, que são processos da dinâmica da estrutura cognitiva, também podem ser tomadas como princípios programáticos do conteúdo a ser ensinado. Em nosso caso, o das razões trigonométricas no triângulo retângulo.

O princípio da *reconciliação integradora* aplicado à organização do material instrucional, segundo Ausubel (2003, p. 168), “[...] pode ser descrito como um contraponto à prática usual dos livros-texto de separar ideias e tópicos em capítulos ou seções”. Tem como objetivo explorar explicitamente relações entre proposições e conceitos, salientando as diferenças e similaridades importantes e reconciliando inconsistências reais ou aparentes.

De acordo com Ausubel (2003, p. 168), o princípio da *reconciliação integradora* da estrutura cognitiva, quando implementado por meio de uma programação apropriada do material de instrução, pode descrever-se melhor como "[...] uma abordagem antiética em relação à prática habitual, entre os escritores de manuais, de compartimentação e de segregação de ideias ou tópicos particulares dentro dos capítulos ou subcapítulos respectivos". Tal princípio de *reconciliação integradora* também se aplica quando se organiza o conteúdo em linhas paralelas, quando se apresentam materiais relacionados de forma sequencial, mas não existe dependência sequencial intrínseca de um tópico para o seguinte (AUSUBEL, 2003).

Corroborando com a concepção ausubeliana, Moreira (exposição oral) reafirma que *reconciliação integradora* é o princípio programático segundo o qual a instrução deve também explorar relações entre ideias, apontar similaridades e diferenças importantes e reconciliar discrepâncias reais ou aparentes. No mesmo sentido, Novak e Gowin (1988) consideram que, para se atingir a *reconciliação integradora* de forma eficaz, devemos organizar o ensino descendo e subindo nas estruturas conceituais hierárquicas, à medida que a nova informação é apresentada. Então, a abordagem ausubeliana de organização de conteúdo não é, de forma alguma, unidirecional. Quando se parte do mais geral para o específico (*diferenciação progressiva*) deve-se fazer constante referência ao geral. Na Figura 2, apresentamos uma representação esquemática do modelo ausubeliano de *diferenciação conceitual progressiva* e de *reconciliação integradora*.

Figura 2 – Diferenciação progressiva versus reconciliação integradora



Fonte: Moreira e Masini (2011, p. 33)

A Figura 2 explicita que é importante que a estrutura cognitiva do aprendiz disponha de conhecimentos prévios com os quais as novas informações ou conhecimentos possam interagir a fim de serem incorporados significativamente por esta estrutura. No caso de os subsunçores necessários não existirem na estrutura cognitiva do aprendiz ou estarem esquecidos, Ausubel (2003) aconselha que o problema seja contornado com a utilização dos organizadores prévios ou dos organizadores avançados. Em conformidade ao preconizado pelo autor, utilizamos em nossa abordagem, textos reflexivos acerca da temática, bem como, recordamos conhecimentos básicos de Geometria plana, como: ponto, reta, ângulo e plano.

A fase da consolidação de aprendizagem pode ser obtida mediante confirmação, correção, diferenciação, revisão e comparações no decurso da exposição do conteúdo, das metodologias de ensino (debates, seminários, visitas ou palestras) e apreciação do material de aprendizagem – desde livros didáticos a *softwares* e aplicativos da *Internet* (AUSUBEL, 2000; AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980). Nesse sentido, Ausubel (2003) salienta que o professor, ao insistir na consolidação ou no domínio de aulas em cursos (primários, secundários ou terciários), antes de introduzir novo material de aprendizagem, deve respaldar-se por uma prontidão contínua de matérias com foco no êxito da aprendizagem, sequencialmente organizada. De acordo com Ausubel (2003, p. 172), “este tipo de aprendizagem pressupõe, como é óbvio, que os passos precedentes sejam sempre claros, estáveis, e bem organizados”. Caso não o sejam, compromete-se a aprendizagem de todos os passos subsequentes.

Na visão de Ausubel, Novak e Hanesian (1980), a retomada do conteúdo ajuda na consolidação, especialmente de itens que exijam discriminação pura entre alternativas de diferentes graus de exatidão e também pela frequência de abordagem do mesmo conteúdo de forma mais aprofundada, dessa forma, confirmando, esclarecendo e corrigindo aprendizagens prévias. Nesse sentido, de acordo com as proposições concatenadas, podemos concluir que a aprendizagem significativa não consiste apenas em aprender o que as palavras representam individualmente ou combinadas, mas aprender o significado de novas ideias expressas, incorporá-las a partir de frases ou orações compostas de dois ou mais conceitos.

A *sequência didática* discutida nesse trabalho de pesquisa tem a função de contribuir para a melhoria de uma aprendizagem ativa, cuja base são os princípios da *diferenciação progressiva* e da *reconciliação integradora*, visando possibilitar a aquisição, a retenção e a organização do conteúdo na estrutura cognitiva do aprendiz, conforme o que sugere Ausubel (2003, p. 6):

> (1) Uma análise cognitiva necessária para se averiguar quais são os aspectos da estrutura cognitiva existente mais relevantes para o novo material potencialmente significativo;
>
> (2) Algum grau de reconciliação com as ideias existentes na estrutura cognitiva, ou seja, apreensão de semelhanças e de diferenças e resolução de contradições reais ou aparentes entre conceitos e proposições novos e já enraizados;
>
> (3) Reformulação do material de aprendizagem em termos dos antecedentes intelectuais idiossincráticos e do vocabulário do aprendiz em particular.

De acordo com as concepções de Ausubel (2003) e Moreira (1999, 2011[a]), a estabilidade e a clareza das ideias ancoradas são determinadas, em grande parte, pelo fato de terem sido aprendidas ou consolidadas por meio da repetição e/ou ensaio, quer em contextos diferentes, quer nos mesmos contextos. Para Ausubel (2003), a estabilidade e a clareza são influenciadas positivamente se o aluno dominar o material instrucional dentro de um contexto homogêneo, antes de entrar em âmbitos mais heterogêneos e utilizar conteúdos de aprendizagem organizados de forma sequencial e hierárquica.

Lemos (2011 apud RIBEIRO, 2015) tenta criar o que chama de “uma receita para o que não tem receita...”, reunindo uma série de princípios que acredita serem fundamentais no momento em que o professor decide a estratégia de ensino e de avaliação que utilizará. Os princípios são:

> a) O ensino é apenas um meio pelo qual a aprendizagem significativa do aluno é favorecida;
>
> b) O ato de ensinar deve ser compreendido como um processo que envolve o planejamento, a situação de ensino propriamente dita e avaliação;
>
> c) A natureza do conhecimento prévio do aluno é determinante do tipo de ensino a ser realizado;
>
> d) A organização de um material de ensino potencialmente significativo requer que a relação entre a natureza do conhecimento do aluno e do conhecimento a ser ensinado seja considerada;

> e) O conteúdo a ser ensinado deve ser selecionado e organizado a partir das suas ideias centrais, seja na aprendizagem dos seus significados ou na evolução conceitual dos mesmos;
>
> f) A natureza do conhecimento a ser ensinado deve ser considerada e enfocar suas ideias centrais;
>
> g) Favorecer a aprendizagem significativa implica possibilitar a interação do aluno com um mesmo conhecimento em diferentes momentos do processo educativo;
>
> h) O objetivo do evento educativo é garantir que os significados sejam compartilhados e, portanto, garantir a ocorrência de situações que oportunizem ao aluno apresentar e negociar suas ideias;
>
> i) A avaliação, voltada para a identificação de evidências de aprendizagem significativa, permeia todo o ensino;
>
> j) O aluno deve ter oportunidade de se perceber como construtor do próprio conhecimento. (LEMOS, 2011, p. 34-35).

Assim, a partir do material e das condições de interação com a estrutura cognitiva do aluno, na aprendizagem significativa, o resultado será, possivelmente, a retenção da informação a ser interiorizada de forma mais estável e significativa. Ou seja, a partir das sucessivas interações, as informações se aglutinam, desencadeando o processo de reconciliação na estrutura cognitiva do aprendiz.

Com a intenção de justificar a síntese das ideias de Ausubel (2003, 1968, 1963) acerca da teoria da aprendizagem significativa, sem distorcer a sua essência, apesar da abrangência da teoria, nesta seção, procuramos salientar alguns aspectos que consideramos significativos para o andamento desta investigação. Reiteramos que o trabalho de pesquisa está fundamentado em uma sequência didática que tem como potencial a facilitação da aprendizagem significativa, a utilização de distintos recursos e estratégias de ensino e a participação ativa do aluno.

2.2 A Engenharia Didática e a Sequência Didática

Na tentativa de apresentar uma sequência de atividades coerente com os pressupostos da *teoria da aprendizagem significativa,* organizamos por meio dos preceitos da *Engenharia Didática*, uma *sequência didática,* com o intuito de favorecer, por meio das atividades, a identificação dos processos de *diferenciação progressiva* e de *reconciliação integradora* dos conceitos fundamentais das *razões* *trigonométricas no triângulo retângulo,* discutidos no 9º Ano do Ensino Fundamental da Educação Básica.

No percurso do desenvolvimento dessa *sequência didática*, buscamos aproximações com os critérios da metodologia da *Engenharia Didática* discutida por Artigue (1996) e Pais (2011). Ressaltamos que nosso interesse por esse viés investigativo também foi aguçado pelos resultados de investigações acerca da aprendizagem, relacionados à temática, apresentados em alguns trabalhos elencados para o estado da arte, na seção 2.5.

Nesse sentido, com o intuito de desenvolver o conceito de *razões trigonométricas no triângulo retângulo* com os alunos, lançamos mão de situações que fizessem a articulação entre a dialética ferramenta-objeto (DOUADY, 1991). Para o autor, um objeto pode ser um recurso de ensino utilizado na exploração de um novo conceito para a solução de um problema matemático.

De acordo com a concepção do referido autor, destacamos o uso de recursos de ensino diversificados, tais como: *Internet*, uso de aparelhos celulares, computadores, *tablets*, aplicativos *(Bubbl.us, WhatsApp), software GeoGebra*, projeção de *slides*, atividades experimentais, leitura de textos, aula expositiva dialogada e aula de campo. Os citados recursos influenciaram o desenvolvimento da *sequência didática,* visando uma melhor interpretação do conteúdo pelos alunos envolvidos nessa pesquisa.

Segundo Pais (2011), a partir do início dos anos de 1980, emergiu a noção de *Engenharia Didática* na Didática da Matemática (enfoque da didática francesa). De acordo com a concatenação histórica apresentada por Pais (2011), a referida metodologia possui uma amplitude teórica, com envolvimento com a Teoria das Situações Didáticas, tendo em vista quadros epistemológicos e obstáculos discutidos por pesquisadores da Didática da Matemática francesa, entre eles, Brousseau, Douady e Chevallard.

De acordo com Pais (2011), a ideia da *Engenharia Didática* apresenta uma analogia entre o trabalho do pesquisador em didática e o trabalho do engenheiro, no que diz respeito à concepção, planejamento e execução de um projeto. Em efeito,

> Tal qual o trabalho de um engenheiro, o educador também depende de um conjunto de conhecimentos sobre os quais ele exerce o seu domínio profissional. Entretanto, quando se faz essa analogia entre a didática com o trabalho do engenheiro, torna-se conveniente destacar que o modelo teórico não é suficiente para suprimir todos os desafios da complexidade do objeto educacional (PAIS, 2011, p. 99).

Nesse sentido, a realização de tal projeto deve ser entendida no seu sentido pleno, envolvendo desde os desafios da criatividade inicial, por ocasião da gestação das primeiras ideias, até sua execução prática, quase sempre em sala de aula. De acordo com Pais (2011, p. 100), “[...] não se trata da execução de um projeto no sentido automatizado da repetição, pois a passagem do campo das ideias para a possibilidade racional é um desafio qualificado”. Para o autor, além do suporte do referencial teórico, é preciso que a realização da prática da pesquisa seja submetida a um controle sistemático, visando preservar as condições de confiabilidade da atividade científica.

Segundo Artigue (1996), a *Engenharia Didática* caracteriza-se, primeiramente, por um esquema experimental baseado em realizações didáticas na sala de aula, ou seja, na concepção, realização, observação e análise de *sequências didáticas*. Caracteriza-se, também, baseada em experimentações na sala de aula, pelo registro no qual se situa e pelo modo de validação essencialmente interna, confrontando a análise *a priori* e a análise *a posteriori.* Nesse sentido, Artigue (1996) destaca que a metodologia da *Engenharia Didática* compreende quatro fases distintas: a) análises prévias, concepção e análise *a priori*; b) experimentação; c) análise *a posteriori*; d) validação da experiência. Na sequência, passamos a analisar cada uma dessas fases.

A primeira é a fase na qual se realizam as análises preliminares, que, de acordo com Almouloud e Coutinho (2008, p. 3), pode comportar as seguintes vertentes:

- Da epistemologia dos conteúdos visados pelo ensino;
- Do ensino usual e seus efeitos;
- Das concepções dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que marcam sua evolução;

- Das condições e fatores de que depende a construção didática efetiva;
- A consideração dos objetivos específicos da pesquisa;
- O estudo da transposição didática do saber considerando o sistema educativo no qual se insere o trabalho.

Segundo Artigue (1996) e Carneiro (2005), cada uma das fases é retomada e aprofundada ao longo do trabalho de pesquisa, em função das necessidades emergentes. Isso significa que a expressão “análises preliminares” não implica que, após o início da fase seguinte, não se possa retomá-las, visto que a temporalidade identificada pelo termo “preliminar” ou “prévia” é relativa, pois se refere apenas a um primeiro nível de organização. Conforme Almouloud e Coutinho (2008), deve ser um trabalho concomitante com as demais fases da pesquisa. Estas análises preliminares devem permitir ao pesquisador a identificação das variáveis didáticas potenciais que serão explicitadas e manipuladas nas fases que se seguem: a análise a priori e a construção da sequência didática.

Na construção da análise a priori, Artigue (1988) distingue dois tipos de variáveis potenciais que são manipuladas pelo pesquisador: as variáveis macrodidáticas ou globais, relativas à organização global da engenharia e as variáveis microdidáticas ou locais, relativas à organização local da engenharia, isto é, a organização de uma sessão ou de uma fase. De acordo com Almouloud e Coutinho (2008), esses dois tipos de variáveis podem ser de ordem geral ou dependente do conteúdo matemático estudado, cujas análises são realizadas em três dimensões: a dimensão epistemológica (associada às características do saber), a dimensão cognitiva (associada às dimensões cognitivas dos alunos sujeitos da aprendizagem) e a dimensão didática (associada às características do sistema de ensino, no qual os sujeitos estão inseridos).

O objetivo de uma análise a *priori* é determinar como as escolhas efetuadas (as variáveis que queremos assumir como pertinentes) permitem controlar os comportamentos dos alunos e explicar seu sentido. Dessa forma, de acordo com Almouloud e Coutinho (2008, p. 3), numa análise a *priori* devemos:

> - Descrever as escolhas das variáveis locais e as características da situação adidática desenvolvida.
>
> - Analisar a importância dessa situação para o aluno e, em particular, em função das possibilidades de ações e escolhas para construção de estratégias, tomadas de decisões, controle e validação que o aluno terá. As ações do aluno são vistas no funcionamento quase isolado do professor, que, sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem;
>
> - Prever comportamentos possíveis e tentar mostrar como a análise feita permite controlar seu sentido, assegurando que os comportamentos esperados, se e quando eles intervêm, resultam do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem.

A fase da experimentação é clássica: é o momento de colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o, se necessário, quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade, o que implica um retorno à análise a priori, num processo de complementação. Ela é seguida de uma fase de análise a posteriori, que se apoia no conjunto de dados recolhidos durante a experimentação: observações realizadas sobre as sessões de ensino e as produções dos alunos em sala de aula ou fora dela. Segundo Artigue (1998), Almouloud e Coutinho (2008) e Pais (2011), esses dados são, às vezes, completados por resultados obtidos pela utilização de metodologias externas: testes de conhecimentos (questionários), entrevistas individuais ou em pequenos grupos, realizadas em diversos momentos do ensino.

A análise a posteriori de uma sessão é o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos e que contribuem para melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições da transmissão do saber em jogo. Segundo Almouloud e Coutinho (2008), ela não é a crônica da classe, mas uma análise feita à luz da análise a priori, dos fundamentos teóricos, das hipóteses e da problemática da pesquisa, supondo que:

> - A observação foi preparada por uma análise a priori conhecida do observador.
>
> - Os objetivos da observação foram delimitados por ferramentas apropriadas, e estruturados também pela análise a priori (ALMOULOUD e COUTINHO, 2008, p. 7)

Assim, a análise a posteriori depende das ferramentas técnicas (material didático, recursos de ensino e coleta de dados) ou teóricas (teoria das situações, sequências didáticas…) utilizadas, com as quais se coletam os dados que permitem a construção dos protocolos de pesquisa. Esses protocolos são analisados profundamente pelo pesquisador e as informações resultantes são confrontadas com a análise a priori realizada, com o objetivo de relacionar as observações com os objetivos definidos a priori e estimar a reprodutibilidade e a regularidade dos fenômenos didáticos identificados. Para Fonseca (2010, p. 68), "equivale na concepção da engenharia civil, por exemplo, à realização ou à execução do projeto". Nesse caso, versa sobre as conclusões acerca da aplicação da *sequência didática*.

Em síntese, as fases da Engenharia Didática nessa pesquisa se encadeiam, conforme se visualiza na Figura 3.

Figura 3 – Síntese das fases da *Engenharia Didática*

Fonte: o autor, 2019.

Em relação ao encadeamento das fases da *sequência didática*, Carneiro (2005) ressalta que o confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori* consiste em investigar aquilo que consideramos na situação didática e que, na prática, sofreu distorções deixando de ser válido. No mesmo sentido, Fonseca (2010) enfatiza que o objetivo é validar ou refutar as hipóteses iniciais da pesquisa.

Nesta pesquisa, para atingir tal nível de discernimento, utilizamos uma pluralidade de procedimentos e técnicas, tendo como meta proporcionar os meios necessários para responder com consistência à questão norteadora de pesquisa. Em síntese, complementarmente, a *sequência didática,* embasada nos princípios da

Engenharia Didática, pôde ser potencializada pelo uso de recursos diversificados de ensino (*Internet,* uso de aparelhos celulares, computadores, *tablets*, aplicativos *(Bubbl.us, WhatsApp), software GeoGebra*, projeção de *slides*, atividades experimentais, leitura de textos, aula expositiva dialogada e aula de campo).

2.3 Influências dos recursos de ensino na aprendizagem significativa

Em relação à temática, esclarecemos que, nesta seção, ao abordarmos os recursos ou as tecnologias de ensino, que podem e devem ser utilizadas em sala de aula, reportamo-nos a um conjunto de ferramentas que engloba tanto artefatos comuns quanto informáticos. Portanto, reiteramos que "recursos/tecnologias de ensino", nesta escrita, são termos tomados como sinônimos.

Nesse percurso, os recursos educacionais (desde os mais tradicionais até os informáticos), historicamente utilizados como tecnologias de ensino, são, de acordo com Fernandes (2010), uma ligação entre a palavra e a realidade. Na perspectiva da teoria que dá suporte a essa pesquisa, o ideal seria que toda aprendizagem se transpusesse para uma situação de vida real do aprendiz.

Como o ideal nem sempre é possível de ser atingido, de acordo com Jonassen (2007), devemos aprender com as tecnologias, independente de sua natureza ser informática ou não; a tecnologia, sendo digital ou não, deve guiar a construção do conhecimento pelo aluno, gerando aprendizagem significativa. Tomando tal posicionamento como ponto de partida, é de se supor que, nos processos de ensino, não devemos abster-nos de utilizar tecnologias, para facilitar as concatenações entre o que os alunos já possuem cognitivamente e os novos conhecimentos apresentados. Nessa direção, Frisch (apud KADU, 2011, p. 9) destaca que "tecnologia é a habilidade de organizar o mundo de forma que não tenhamos que senti-lo".

De maneira geral, segundo Jonassen (2007), ao considerar o uso das tecnologias na educação, há de se ponderar a sua influência no desenvolvimento das competências dos alunos, assim como as vantagens e as desvantagens que podem advir do seu uso. De acordo com o autor (2007, p. 15):

> As tecnologias têm sido tradicionalmente utilizadas nas escolas para "ensinar" os alunos do mesmo modo como o fazem os professores [...]. Não acredito, apesar de este ser um pressuposto tradicional de grande parte do ensino, que os alunos aprendam a partir de [...]. Pelo contrário, os alunos aprendem pensando de forma significativa, sendo o pensamento activado por actividades que podem ser proporcionadas por [...] ou por professores. Ao representarem o que sabem nas formas exigidas por **diferentes ferramentas cognitivas**, os alunos estão a pensar. (grifo nosso).

Ferramentas cognitivas[5] são, portanto, aplicações que exigem que os alunos pensem de forma significativa de modo a usarem a aplicação para representar o que sabem. Para Jonassen (2007), os alunos não podem utilizar aplicações sem pensarem criticamente. Em conformidade com a citação do autor, salientamos que inúmeras pesquisas têm relatado discussões que querem mudar os rumos da educação. As referidas pesquisas têm apontado o uso de tecnologias como possibilidade de reestruturação dos processos de ensino e de aprendizagem.

Para Basso[6] (2015), uma das argumentações implícitas está relacionada à questão de que, em sala de aula, devemos utilizar as tecnologias. Nesse sentido, Basso (2015, p. 12) argumenta que

> [...] o professor utiliza tecnologia quando usa o giz, a lousa, o livro texto. [...], a tecnologia não é de modo algum somente toda a parafernália moderna que temos em todos os lugares de nossa sociedade, ela é simplesmente todo produto produzido pelo homem para as atividades que vêm desenvolvendo desde que começou a raciocinar, com intuito de melhorar sua vida cotidiana.

Com base nesse posicionamento, destacamos que quadro negro, giz e apagador são tecnologias utilizadas em, praticamente, qualquer sala de aula, a fim de materializar conceitos orais, tornando-os concretos e intuitivos. Corroborando com o observado, Basso (2015) ainda destaca que outras incontáveis tecnologias poderiam fazer parte do cotidiano de sala de aula como aliadas aos processos de ensino e de aprendizagem. Corroborando com o autor, Alcici (2014, p. 1) adverte que,

> [...] nesse contexto, em que o uso das tecnologias são condições essenciais para o exercício pleno da cidadania, a função social da escola tem se constituído em objeto de intensos debates e questionamentos na busca de um paradigma de organização escolar que melhor atenda às necessidades do mundo moderno.

---

[5] Segundo Jonassen (2007) "são todos os recursos ou tecnologias que podem ajudar nos processos de ensino e aprendizagem significativa em sala de aula".

[6] Para saber mais sobre a evolução das tecnologias educacionais, ler BASSO, A. **As tecnologias no ensino-aprendizagem:** uma discussão em aberto – Coleção Mundo das Ideas, Imprepel, 2015.

Na busca por atender tais demandas, na área da Matemática, nas últimas décadas, de acordo com Rosa e Orey (2015), têm-se trabalhado a disciplina sob o enfoque das “Tendências do Ensino de Matemática”. Segundo os autores, este é um título que vem sendo utilizado para designar novas possibilidades trazidas pelo desenvolvimento do campo da Educação Matemática, na elaboração de referências curriculares, livros didáticos, formação de professores e outras apropriações. Corroborando com o exposto, Valente (2014, p. 41), [...] salienta que “a incorporação dessas Tendências tem implicado na atenção e na valorização do uso da tecnologia, da resolução de problemas, [...] dentre outros elementos, como alternativas para as práticas pedagógicas”.

Segundo Rosa e Orey (2015), estas alternativas, entre outros fatores, devem-se ao fato de experiências sensíveis terem passado a ser profunda e amplamente marcadas pela ação das tecnologias que, de alguma maneira, transformaram a relação dos sujeitos com os fazeres mediados por elas. Os vínculos entre práticas educativas e tecnologias de ensino, sobretudo, informáticas, estreitam-se consideravelmente na contemporaneidade, ao menos, por duas fortes razões:

> [...] os avanços tecnológicos na comunicação e informática e as mudanças no sistema produtivo envolvendo novas qualificações e, portanto, novas exigências educacionais. O impacto dessas novas realidades no ensino impõe ao menos três tipos de leitura: a pedagógica, a epistemológica e a psicognitiva (BRITO, 2006, p. 6).

De acordo com o explicitado pelo autor, o ponto de vista psicognitivo é o que vem ao encontro das percepções mais iminentes no campo do Ensino de Matemática, pois está diretamente imbricado com os discentes. Nesse sentido, entendemos que nenhuma intervenção pedagógica “harmonizada com a modernidade e os processos de mudanças que estão implícitos será eficaz sem a colaboração consciente dos alunos” (BRITO, 2006, p. 6). Porém, a questão nos parece mais complexa e, talvez, seja prudente abordá-la a partir de considerações sobre a presença intensificada das tecnologias em nossa sociedade, que, de certa maneira, impõe a necessidade de sua inclusão nos processos educativos.

Para Jonassen (2007), muitas tecnologias educacionais falharam porque não foram corretamente implementadas. Em busca de uma solução, sugere uma nova abordagem de ensino e de aprendizagem, na qual os professores devem renunciar, em parte, sua autoridade intelectual para dar espaço aos alunos, que devem assumir mais responsabilidade na construção de significados.

Nesse sentido, corroborando com a discussão, Ausubel (2003) destaca que, na aprendizagem significativa, o aluno é ativo na construção do seu conhecimento e participa do processo educacional. Diante disso, inferimos que, no contexto escolar, para que a aprendizagem efetivamente aconteça e seja significativa ao aluno, é necessário que este participe de atividades diversificadas que o levem a desenvolver diferentes tipos de competências cognitivas.

Em outra instância, mas envolto no mesmo propósito, o de buscar nortear o uso das tecnologias como aliadas dos processos significativos de ensino e de aprendizagem, Jonassen (2007) incita que se encontrem dentro dos processos educativos, soluções que atendam à visão atual de mundo, de cultura dos aprendizes que nasceram na Era tecnológica. A ideia em torno da qual Jonassen (2007) organiza a sua proposta é a das tecnologias de ensino como ferramentas que ajudam o aluno a pensar.

No tocante à utilização das ferramentas tecnológicas para o ensino de Matemática, as discussões apontam para a integração efetiva dessas tecnologias nos processos educacionais contemporâneos. Na visão de Borba (apud KALINKE, 2014, p. 91), “a incorporação de recursos tecnológicos em processos educacionais pode trazer benefícios a esses processos e acaba gerando neles interferências estruturais”. Ainda, segundo Borba, citado por Kalinke (2014), devemos nos inspirar e acrescentar novas práticas possíveis na sala de aula de Matemática, observando que mais importante do que salientar os seus problemas é verificar quais as suas virtudes.

Por seu lado, Borba e Penteado (2001) defendem que a disponibilidade de novas mídias nos processos pedagógicos, em especial na sala de aula, pode modificar o pensamento matemático. Esses autores entendem que uma mídia não elimina a outra, mas que elas podem coexistir e serem utilizadas de forma simultânea. Dessa forma, é possível a presença da mídia informática em uma atividade que também utiliza as mídias lousa e giz.

Ratificando os argumentos dos autores, Alcici (2014) enfatiza que é preciso discutir e encontrar caminhos alternativos para que as tecnologias de ensino se fortaleçam cada vez mais dentro do ambiente escolar e que possam ser vistas como aliadas nesses processos. Corroborando com a asserção, Howland, Jonassen e Marra (2011) alegam que as tecnologias têm sido usadas nos ambientes escolares para dar suporte às atividades do professor, mas ainda são subutilizadas no sentido de integrá-las às atividades dos alunos.

Segundo os autores, quando os alunos usam tecnologias para representar suas ações e construções, usam-nas a fim de pesquisar soluções de problemas que querem resolver, isto é, os estudantes valem-se das tecnologias com um propósito específico. Dessa forma, aprendem significativamente. Nesse sentido, Howland, Jonassen e Marra (2011) ressaltam que a aprendizagem significativa é privilegiada quando as tecnologias de ensino envolverem os alunos em:

- ✓ Construção do conhecimento, não reprodução;
- ✓ Conversa, não recepção;
- ✓ Articulação, não repetição;
- ✓ Colaboração, não competição;
- ✓ Reflexão, não prescrição.

Nessa perspectiva, destacamos que, embora não haja menção explícita à teoria de Ausubel, podemos identificar nos atributos organizados por Howland, Jonassen e Marra (2011), convergência com sua proposta de aprendizagem. Em razão do apresentado, concebemos que a verdadeira construção do significado, que resolve a dissonância entre o que sabemos com certeza e o que percebemos, ou o que acreditamos que os outros saibam, resulta de um quebra-cabeça. Na mesma linha, Maturana (1980 apud JONASSEN, 2007, p. 216), classifica-o como uma perturbação, violação de expectativas (SCHANK, 1986 apud JONASSEN, 2007, p. 216), adaptação ao meio ambiente, que compromete ciclos de assimilação e de acomodação (PIAGET, 1985 apud JONASSEN, 2007, p. 216).

Na visão de Howland, Jonassen e Marra (2011), as tecnologias de ensino são importantes aliadas na promoção da educação que visa desenvolver nos estudantes habilidades para a construção do conhecimento, colaboração e pensamento crítico. Na mesma linha, Ausubel (2003, p. 24) ressalta que a "aprendizagem significativa constitui apenas o primeiro passo de um processo de assimilação mais amplo e abrangente".

Diante dessas perspectivas e corroborando com a asserção de Ausubel (2003), Howland, Jonassen e Marra (2014) elencam algumas possibilidades para que os educandos aprendam de forma significativa no século XXI. Para os autores, eles devem ser intencionalmente envolvidos em uma atividade que tenha algum significado para eles. Essa atividade deve ser ativa, construtiva, intencional, autêntica e cooperativa. Olhando por esse prisma, Jonassen (2007, p. 24) citando Jonassen, Peck e Wilson (1999) asseveram que a aprendizagem significativa é:

> *Activa (manipulativa/observante)* – os alunos interagem com um ambiente e manipulam objectos nesse ambiente, observam os efeitos das suas intervenções e constroem as suas próprias interpretações do fenómeno observado e dos resultados da sua manipulação;
>
> *Construtiva (articulatória/reflexiva)* – os alunos integram novas experiências e interpretações no seu conhecimento prévio sobre o mundo, constroem os seus próprios modelos mentais simples, para explicar o que observam;
>
> *Intencional (complexa/contextual)* – os alunos articulam os seus objectivos de aprendizagem, o que estão a fazer, as decisões que tomam, as estratégias que utilizam e as respostas que encontram;
>
> *Autêntica (complexa/contextual)* – os alunos realizam tarefas de aprendizagem que se enquadram numa situação do mundo real significativa ou simuladas num ambiente de aprendizagem baseado em casos ou problemas;
>
> *Cooperativa (colaborativa/conversacional)* – os alunos trabalham em grupos, negoceiam socialmente uma expectativa comum, assim como a compreensão da tarefa e os métodos que irão utilizar para a realizarem.

Em face do exposto, encontramos em Jonassen (1996), os argumentos que norteiam os pressupostos apresentados. O referido autor destaca que o conhecimento tende a ser estimulado por uma questão ou necessidade ou pela vontade do estudante de entender alguns fenômenos. Na mesma linha, argumenta que o que possibilita o início do processo de construção do conhecimento é uma dissonância entre o que é entendido pelo aluno e o que ele costuma observar no entorno do meio no qual está imerso. Ademais, Jonassen (1996) dá destaque generalizado não só aos encaminhamentos para a identificação da aprendizagem significativa, mas também às características do uso de tecnologias como aliadas aos processos de ensino e de aprendizagem. Nesse sentido,

> [...] essas características de aprendizagem e do uso da tecnologia são inter-relacionadas, interativas e interdependentes. Isto é, as tecnologias devem ser selecionadas e usadas nos contextos de aprendizagem de forma que não comprometam a maioria destes critérios. Porque essas características são sinérgicas; sua combinação resulta em aprendizagens ainda maiores do que as características individuais usadas isoladamente (JONASSEN, 1996, p. 74)

Corroborando com a abordagem, Bulegon (2011, p. 38) destaca que,

> [...] podemos verificar que, fora da sala de aula, a maior parte da aprendizagem ocorre pela descoberta. A exemplo disso está o uso das tecnologias, em que as crianças em idade pré-escolar e primeiros anos de escolarização, ainda não são letradas e, no entanto, já sabem operar com o computador, celular, etc. Aprendem por experimentação e manuseio do objeto de estudo, neste caso, material potencialmente significativo. Aprendem por uma necessidade, de forma isolada ou em equipe, que pode ocorrer inicialmente de forma mecânica, mas que ao longo do processo de assimilação passa pela reflexão. É uma aprendizagem que perpassa os muros escolares e que permanece por mais tempo na estrutura cognitiva dos estudantes, pois há um interesse, uma significação.

De acordo com Jonassen (1996, p. 73), "quando os estudantes se envolvem nestes significados construindo processos, a aprendizagem significativa surgirá naturalmente". Nesse sentido, podemos inferir que, quando os alunos se tornam parte das comunidades de construção do conhecimento, tanto na sala de aula quanto fora dela, eles aprendem que existem formas variadas de visão do mundo e soluções múltiplas para a maioria dos problemas e que estas soluções podem emergir a partir da relação que fazem entre o conhecimento internalizado e o novo experenciado por eles.

Segundo Ausubel (2003), podemos identificar várias fontes de evidências inter-relacionadas que apontam e sugerem, empiricamente, que quando o aprendiz utiliza um recurso que o auxilia na compreensão de um fato novo, a aprendizagem e a retenção significativas são mais eficazes do que as correspondentes por memorização. Nessa linha, o autor argumenta que as razões provêm, em primeiro lugar, do fato de o material de instrução na aprendizagem significativa ser logicamente e, por isso, potencialmente significativo, contribuindo, sem dúvida, com algo significativo para esta superioridade; mas, "é essencialmente a superioridade nos *processos* de aprendizagem significativa [...] que explica, basicamente, os resultados da aprendizagem e da retenção superiores” (AUSUBEL, 2003, p. 31).

Nessa perspectiva, com base nos pressupostos da aprendizagem significativa de Ausubel e Jonassen, podemos dizer que a forma como os alunos constroem conhecimento depende do que eles já sabem, o que, às vezes, depende do tipo de experiências que tiveram, da forma como organizaram essas experiências em estruturas de conhecimento e das convicções que usam para interpretar objetos e acontecimentos que encontram no mundo. Nesse sentido, os recursos de ensino utilizados podem facilitar o processo de aprendizagem.

Corroborando com o que foi colocado anteriormente, Jonassen (2007, p. 21) argumenta que “[...] as tecnologias de ensino podem apoiar a construção de significados por parte dos alunos, o que acontece quando os alunos são colocados em situações nas quais possam aprender *com* as tecnologias”. Conforme o autor, as ferramentas informáticas, assim como outros tipos de recursos de ensino, são ferramentas cognitivas adaptadas que funcionam como parceiras intelectuais do aluno, estimulando e facilitando o pensamento crítico e a aprendizagem de ordem superior, isto é, a aprendizagem efetiva. Após transitar por vários conceitos relacionados às ferramentas cognitivas (SALOMON, 1993; PEA, 1985; KOMMERS; JONASSEN; MAYES, 1992; DERRY, 1990; PERKINS, 1993), o autor conclui que “ferramenta cognitiva” é apenas um conceito. Para justificar sua conclusão, Jonassen (2007, p. 23) destaca:

> As ferramentas cognitivas representam uma abordagem construtivista da utilização dos computadores, **ou de qualquer outra tecnologia**, ambiente ou actividade, que estimule os alunos na reflexão, manipulação e representação sobre o que sabem, ao invés de reproduzirem o que alguém lhes diz. Ao utilizar uma ferramenta cognitiva, o conhecimento é construído pelo aluno, não transmitido pelo professor (Grifo nosso).

De acordo com o explicitado, inferimos que as tecnologias de ensino (*internet*, uso de aparelhos celulares, computadores, *tablet*, aplicativos *(Bubb.us, WhatsApp), software GeoGebra*, projeção de *slides*, atividades experimentais, leitura de textos, aula expositiva dialogada e aula de campo) que decidimos utilizar em sala de aula motivaram e predispuseram os envolvidos no processo a querer aprender. Durante a intervenção, pudemos perceber a maneira como os aprendizes se envolveram com o estudo do tema. Dada a forma como abarcaram a proposta, inferimos que os recursos selecionados tiveram papel singular para a construção autônoma de hipóteses, propiciando o desenvolvimento da habilidade de pensar, como também o processo de compartilhamento de suas ideias.

Ao aludirem aos processos de aprendizagem ativa, construtiva, intencional, autêntica e cooperativa, Howland, Jonassen e Marra (2011) sugerem que, para atingir os estágios preconizados e alcançar uma estrutura de aprendizagem significativa que seja eficaz para os alunos, se tomem como referência, os padrões da sociedade internacional para as tecnologias em educação, a parceria com as habilidades do século XXI e o conhecimento de conteúdo tecnológico e pedagógico. Os pressupostos apontados pelos autores são ancorados nas deduções de Jonassen (2007, p. 308), ao ressaltar que

> [...] nenhuma área de conteúdo alguma vez estudada pode ou deverá ser compreendida apenas de uma maneira. **Envolver os alunos em actividades educativas e [...] que empregam apenas uma única forma de representação do seu conhecimento constrange necessariamente a sua compreensão daquilo que estão a estudar.** Os alunos, em todos os níveis de ensino, possuem uma compreensão deficiente do conteúdo, pois é-lhes exigido que representem o que sabem apenas de uma maneira. (Grifo nosso).

Das palavras do autor, entendemos que a diversificação da utilização de recursos, estratégias e tecnologias de ensino é primordial para a ampliação do conjunto de percepções de que o aluno necessita para consolidar sua aprendizagem. Ao abordar o cenário do atual contexto educativo, Moreira (2011[a]) sugere que a presença das tecnologias, mais especificamente do computador, amplia a visão triádica[7] da captação de significados, considerando a interação entre aluno, professor e materiais educativos, incluindo a mediação com o computador. Segundo o autor,

> [...] atividades como simulação e modelagem computacional passam a integrar o ensino não apenas como recurso didático, mas como mecanismos que podem levar a um outro tipo de cognição, a novos processos cognitivos, quiçá a uma outra aprendizagem significativa (MOREIRA, 2011a, p. 173).

De acordo com Moreira (exposição oral), as precondições de ocorrência de aprendizagem significativa em um contexto tecnológico podem ser identificadas de várias maneiras, como, por exemplo, através da motivação e da participação dos

---

[7] Que pertence a uma tríade aluno-professor-material instrucional.

alunos quando vivenciam experiências de simulação computacional. Porém, exige-se que os professores tenham certas competências compatíveis. Moreira (exposição oral) salienta que hoje, apenas reproduzir informações já não surte mais efeito nos processos de ensino e de aprendizagem. É preciso que os professores guiem os alunos, identificando o que deve ser transformado em conhecimento. E para que isto seja possível, é necessário um processo eficaz e constante de atualização do uso de determinadas ferramentas. Corroborando com o argumento de Moreira (2011[a]), Howland, Jonassen e Marra (2011, p. 2) afirmam que,

> [...] para que os alunos aprendam de forma significativa, devem se engajar voluntariamente em uma tarefa significativa. Para que a aprendizagem significativa ocorra, a tarefa deve envolver os alunos de forma ativa, construtiva, intencional, autêntica, e de forma colaborativa. Ao invés de testar o conhecimento inerte, as escolas devem ajudar os alunos a aprender como organizar e resolver problemas, compreender fenômenos novos, construir modelos mentais desses fenômenos, e, dada uma situação nova, definir metas e regular sua própria aprendizagem (Tradução nossa[8]).

Em face da abordagem, Alcici (2014) explicita que a integração das tecnologias em voga não pressupõe um aluno passivo, que só recebe a informação, sem atuar sobre ela. Ao contrário, pressupõe um aprendizado ativo, no qual o aluno está construindo o seu conhecimento a partir daqueles que já possui (ALCICI, 2014). De acordo com a autora, consequentemente, o aluno passa a querer, de forma consciente, passar pelo processo de aprendizagem que o levará à incorporação de conceitos significativos.

Howland, Jonassen e Marra (2011) entendem que o ensino deve agir no sentido de que os alunos aprofundem e ampliem os significados que constroem ou adquirem por meio da participação nas atividades de aprendizagem. Ademais, os autores argumentam que as tecnologias educacionais são muito mais do que *hardware* e *software*. De fato, de acordo com os referidos autores, as tecnologias são um conjunto de conhecimentos que se aplicam em diferentes atividades, por vezes, afetando incisivamente o comportamento das pessoas.

---

[8] [...] for students to learn meaningfully, they must voluntarily engage in a meaningful task. In order for meaningful learning to occur, the task must engage students actively, constructively, intentionally, authentically, and collaboratively. Instead of testing inert knowledge, schools should help students learn how to organize and solve problems, understand new phenomena, construct mental models of these phenomena, and, given a new situation, set goals and regulate their own learning. Fonte: HOWLAND, J. L.; JONASSEN, D.; MARRA, R. M. (2011, p. 292).

Nesse sentido, Dullius (2016) destaca que as tecnologias atuais fazem com que a sociedade viva um período de intensa mudança. Tal aspecto reflete sua forma de comunicar-se, relacionar, aprender, buscar conhecimento e, consequentemente novas maneiras de pensar e de conviver. Para a autora, os processos de inserção e consolidação do uso do computador e dos dispositivos móveis digitais têm influenciado de maneira singular, o comportamento de professores e alunos, afetando sensivelmente o ambiente da sala de aula. Em relação à asserção anterior, Dullius (2016, p. 5) questina: “Quais vantagens e desvantagens que o uso destes equipamentos proporciona na prática pedagógica dos docentes?”

Não há uma resposta única para tal questionamento; porém, cabe a cada educador refletir sobre ele, considerando que tudo o que não dominamos assusta. Pensar nos professores e tentar vislumbrar como será sua formação, uma vez que o desenvolvimento profissional é uma tarefa indispensável para qualquer prognóstico que se deseje realizar em relação à utilização das ferramentas cognitivas na educação.

Nessa perspectiva, os desafios docentes se apresentam todos os dias, como as tecnologias digitais, que, definitivamente, se instalaram nas nossas salas de aula. Aludindo ao assunto, Para Bottentuit, Albuquerque e Coutinho (2016), as tecnologias móveis de acesso comum à maioria da população brasileira se adéquam perfeitamente às necessidades do novo aluno que emerge nos ambientes escolares. Segundo os autores, a popularidade dessas tecnologias está relacionada à permissão de troca de mensagens, áudio, vídeo e documentos de forma instantânea.

Nesse sentido, Bottentuit, Albuquerque e Coutinho (2016, p. 15) comentam que o *WhatsApp*[9], por exemplo, tem sido utilizado “[...] em contexto educativo, tanto em nível escolar e superior, como na formação continuada, permitindo aos alunos e educadores experiências e dinâmicas interessantes [...]”. Olhando por esse prisma, no Quadro 1, destacam-se algumas vantagens e desvantagens do uso deste aplicativo na área educacional.

---

[9] Site oficial (www.whatsapp.com), o *WhatsApp Messenger* é um aplicativo de mensagens multiplataforma que permite trocar mensagens pelo celular sem pagar por SMS (serviço de mensagens curtas)

Quadro 1 – Vantagens e desvantagens do uso do *WhatsApp*

Vantagens do *WhatsApp*	**Desvantagens do *WhatsApp***
Interatividade e facilidade de acesso; Compartilhamento de conhecimento professor-aluno, aluno-aluno; Possibilita uma comunicação síncrona e assíncrona; Permite um maior diálogo e problematização dos temas; Ferramenta motivadora dentro e fora de sala de aula; Permite esclarecer dúvidas fora da sala aula; Permite compartilhar informação em múltiplos formatos (texto, áudio, vídeo e documentos).	Pode distrair ou desviar o foco de atenção dos alunos; Necessita de acesso à Internet para funcionar; Os alunos necessitam de telefones mais modernos para utilizar a ferramenta.

Fonte: adaptado de Bottentuit, Albuquerque e Coutinho (2016, p. 6).

Explicitamente, de acordo com os apontamentos dos autores, muitas são as vantagens do uso dessa tecnologia digital, em comparação às desvantagens. Os itens elencados explicitam que a escola do Século XXI não pode deixar de dialogar com essas tecnologias, presentes na vida de quase todos os indivíduos.

Corroborando com o posicionamento dos autores, destacamos que, no andarilhar dessa pesquisa, por exemplo, utilizamos como recurso para troca de mensagens, o *WhatsApp,* que é uma ferramenta de comunicação móvel instantânea. A tecnologia nos proporcionou, além da comunicação entre pesquisador e pesquisados, o compartilhamento de atividades inerentes à pesquisa, no caso, o envio dos mapas conceituais desenvolvidos durante a investigação.

Também utilizamos o *Bubbl.us*[10] para a construção dos mapas conceituais. Esse *software* possui características que se assemelham aos pressupostos de uma brainstorming (termo inglês que significa, literalmente, “tempestade cerebral”). O *Bubbll.us* é um site gratuito, que não exige cadastro para ser usado. Para usá-lo, basta clicar em “*Start Brainstorming*”. Porém, caso se queira salvar os organogramas, é necessário clicar em “*Create Account*” (crie uma conta), preenchendo alguns dados básicos, como nome, senha e *e-mail*. Durante nossa

[10] *Brainstorming and mind maps online*. Disponível em: https://bubbl.us/

intervenção, os alunos o acessaram remotamente de seus celulares, no intuito de elaborarem seus mapeamentos sem cadastramento na plataforma.

A forma de acessá-lo a partir do celular e as orientações básicas de funcionamento do *software* foram explicadas para o grande grupo em sala de aula, antes do início da atividade. Ressalta-se que não houve nenhum registro de dificuldades no acesso à funcionalidade e ao uso de ferramentas do *Bubbl.us*. No percurso, após sua confecção, o mapa era enviado pelo *WhatsApp* ao pesquisador, atestando eficiência, dinâmica e rapidez que as ferramentas digitais são capazes de proporcionar.

Nessa perspectiva, expande-se a aprendizagem mediada pelo uso didático de tecnologias a fim de potencializar e ampliar as possibilidades de aprender. Dispositivos móveis e suas ferramentas, como o *WhatsApp*, o *Bubbl.us*, passaram a mediar atividades de ensino e de aprendizagem, dinamizando as aulas e possibilitando ao processo educacional maior flexibilidade, criatividade, motivação, agilidade e inovação.

Considerando o potencial dos aplicativos utilizados, foi observado em pesquisas correlatas (apresentadas na seção 2.5), que muitos educadores buscam utilizar não só aplicativos, mas também outras ferramentas educativas, com o intuito de potencializar a aprendizagem, desenvolvendo experiências educacionais nos processos de ensino e de aprendizagem de determinados conteúdos na disciplina de Matemática. Tais experiências almejam que os alunos possam aprender significativamente com os recursos disponibilizados.

Para Borba, Silva e Gadanidis (2015, p. 17), "as dimensões da inovação tecnológica permitem a exploração e o surgimento de cenários alternativos para a educação e, em especial, para o ensino de Matemática". Ao discutirem as quatro fases[11] das tecnologias digitais em Educação Matemática, Borba, Silva e Gadanidis (2015) enfatizam a forma como a sala de aula tem se transformado para incorporar

[11] A primeira fase é caracterizada fundamentalmente pelo uso do software LOGO, que teve início por volta de 1985. A segunda fase tem início na primeira metade dos anos 1990, a partir da acessibilidade e popularização do uso dos computadores pessoais. A terceira fase tem início por volta de 1999 com o advento da internet. Atualmente estamos vivenciando a quarta fase com relação ao uso de tecnologias em educação matemática. Essa fase teve início em meados de 2004, com o advento da internet rápida. Na quarta fase, se tornou comum o uso do termo "tecnologias digitais" (TD) é caracterizada por diversos aspectos.

ou impedir a entrada dessas tecnologias. Segundo os autores, vídeos, internet, *Facebook, YouTube, GeoGebraTube, GeoGebra*[12] estão no topo do ranque e já são ferramentas consideradas naturais dentro do contexto educacional.

De acordo com Cruz, Quartieri e Maman (2018), em linhas gerais, o *software GeoGebra* apresenta uma interface de fácil manipulação. Possui múltiplas funcionalidades, podendo ser utilizado em campos como: aritmética, álgebra, geometria, trigonometria. Esta última, em especial, caracteriza o foco da nossa abordagem. A intenção do uso do recurso propiciou explorar sua dinamicidade e algumas potencialidades do mesmo durante nossa intervenção.

Destacamos que na interface desse *software,* encontra-se uma Barra de Ferramentas localizada na parte superior, composta de 12 conjuntos de ícones com os recursos necessários para o usuário construir, movimentar, obter medidas e modificar atributos de objetos construídos, propiciando dinamismo nos processos de ensino e de aprendizagem. Dada toda essa recursividade proporcionada pelo *software*, o elencamos como protagonista de duas das atividades propostas em nossa *sequência didática*: a construção do triângulo e o cálculo da inclinação de rua.

Em razão dos pressupostos, as atuais tecnologias e as abordagens pedagógicas decorrentes de sua crescente e irrecorrível inserção tanto em sala de aula, quanto nos estudos, na realização de pesquisas, seguramente, estão modificando de maneira significativa as relações entre professores e alunos. Assim, de acordo com Cruz, Quartieri e Kliemann (2018), o professor deixa, de fato, de constituir-se na fonte única ou privilegiada da informação, do conhecimento e da autoridade. Porém, ao mesmo tempo, torna-se cada vez mais imprescindível na construção da seletividade das fontes, dos conteúdos e das abordagens, tornando-se aliado e guia do estudante na organização e execução de suas tarefas.

Nesse sentido, Alcici (2014, p. 2) corrobora ao destacar que a função do professor prescinde “manter-se eficiente e eficaz e prestar o serviço adequado que a sociedade espera”. Para a referida autora, é hora de rever as práticas tradicionais e encontrar uma nova forma de fazer educação, sem perder de vista a essência do papel do professor, que permanece, apesar das profundas mudanças na sociedade:

[12] Software livre, disponível em: <https://www.geogebra.org/>

proporcionar um ensino de qualidade e preparar os indivíduos para o exercício pleno da cidadania (ALCICI, 2014).

Corroborando com Alcici (2014), Kalinke (2014, p. 25) argumenta que “[...] para acompanhar essas transformações, o profissional do magistério precisa estar atento ao movimento tecnológico e preparado para enfrentar as novidades com as quais se depara constantemente”. Nesse sentido, Cruz, Quartieri e Santos (2018) chamam atenção para o fato de que as tecnologias têm criado certas dinâmicas, como a plasticidade, o movimento, a bricolagem. Ao mesmo tempo, segundo os autores, elas favorecem relações mais horizontalizadas de produção e de troca de saberes, de construção de conhecimentos e de criação.

As argumentações de diferentes autores que subsidiaram o aporte teórico desta seção deixam a entender que a influência do uso de recursos de ensino diversificados nas aulas Matemática, como construtor de aprendizagem significativa dos conteúdos matemáticos, vale-se de diferentes estratégias de abordagem para o desenvolvimento cognitivo do aluno. A partir dessas estratégias, busca ampliar as maneiras de aprender significativamente por parte do aluno.

Nesta seção, discorremos acerca da relação das tecnologias de ensino e aprendizagem significativa. O intuito não foi confrontá-las, mas associá-las a abordagens diferenciadas em torno dos atuais processos de ensino e de aprendizagem. Sendo assim, apresentamos na próxima seção, algumas concatenações relacionadas ao contexto histórico da *trigonometria e do triângulo retângulo*, mostrando como sua origem na antiguidade está relacionada a questões mais práticas, voltadas às medidas de distância inacessíveis e a estudos astronômicos desenvolvidos pelos povos egípcios, babilônicos, gregos e hindus. Para finalizar a referida seção, abordamos algumas aplicações da trigonometria na atualidade, em alguns campos da atividade humana, a citar: Engenharia, Medicina, Física, entre outras.

2.4 O Triângulo Retângulo e a Trigonometria

Buscando na História registros do surgimento do triângulo, verificamos que não há referência precisa de como e quando esse polígono surgiu. Contudo, infere-se que, ao longo da evolução da humanidade, surgiu a necessidade de criar o triângulo. Os triângulos mais antigos de que se tem registro são os que foram aplicados na arquitetura. Supomos que, impulsionados pela necessidade, os povos antigos tenham usufruído intuitivamente do triângulo retângulo. Na atualidade, o triângulo retângulo, no universo da Matemática, é uma das figuras geométricas mais utilizadas para solucionar cálculos de volume e de área.

Sua expressiva presença em campos diversos do cotidiano, corroborou para que discutíssemos suas particularidades de forma significativa com alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental da Educação Básica. Por definição, um triângulo retângulo é aquele que possui um ângulo reto (igual a 90º) e dois outros ângulos agudos. A soma dos ângulos internos do triângulo retângulo é de 180º, o que corresponde a um ângulo raso (GUEDES, 2018). A partir da definição, outras propriedades surgem, diferenciando esse tipo de triângulo dos demais, no caso, algumas particularidades relacionadas aos seus lados e ângulos – objetos da nossa investigação.

Em decorrência do mencionado, D’amore (2005) corrobora explicitando que a história que constitui o surgimento de um objeto matemático tem uma relação próxima com a própria epistemologia da Matemática. Para o autor,

> [...] cada assunto matemático possui um estatuto epistemológico próprio que depende da história de sua evolução no interior da matemática, da sua aceitação crítica no âmbito da Matemática, das reservas que lhe são próprias, da linguagem na qual é expresso ou que é necessária para poder exprimi-lo (D’AMORE, 2005, p. 106).

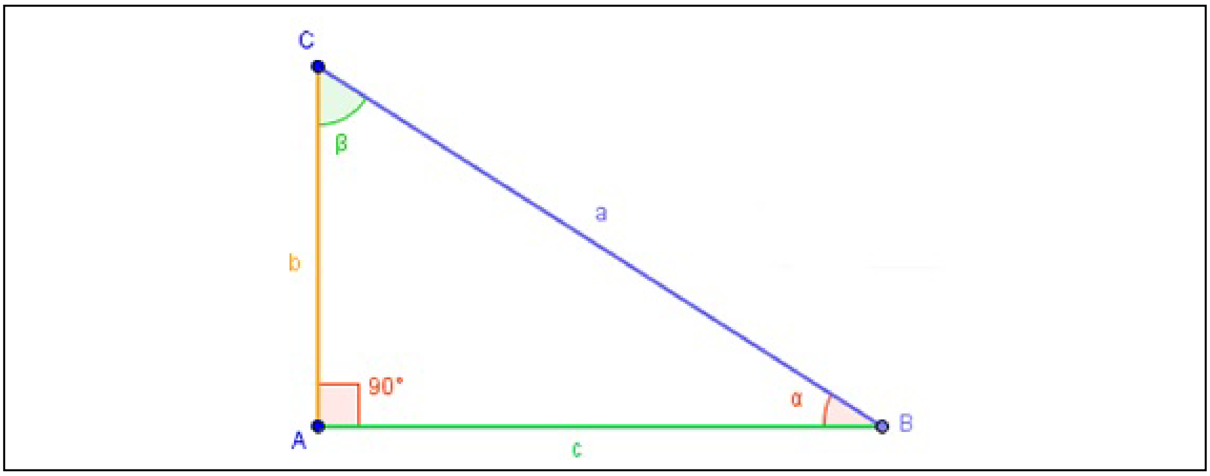
A necessidade de relacionar medidas de distância com ângulos levou diferentes povos, tais como árabes, hindus, babilônios e gregos, a descobrirem a trigonometria, sendo o triângulo retângulo componente do estudo dessa área da Matemática. Porém, quando falamos em qualquer nível de ensino sobre triângulos retângulos, logo, os alunos o remetem a Pitágoras e seu famoso teorema. No entanto, a origem desse estudo precede a época do famoso matemático.

De acordo com Silva (2019), um tipo especial de triângulo, que tem dois lados perpendiculares entre si, era chamado pelos matemáticos da Antiguidade de triângulo reto. Os triângulos retos foram assunto dos estudos de Pitágoras, importante matemático grego, que nasceu na ilha de Samos, no mar Egeu, por volta de 580 a.C., mas que passou parte da vida no Sul da Itália. Ele descobriu uma propriedade usada em todos os triângulos retos.

Acerca de Pitágoras, segundo Silva (2019), pouca coisa sabemos. De acordo com o autor, ele e seus seguidores, conhecidos como pitagóricos, não deixaram nenhum trabalho escrito; por isso, ninguém sabe o que é a obra do próprio Pitágoras e o que foi descoberto por seus seguidores. Apesar de todo misticismo que os circundava, o que se sabe é que os pitagóricos eram grandes matemáticos, e descobriram propriedades interessantes e curiosas sobre os números.

Mesmo com todos esses feitos, o que ficou mais conhecido na história da Matemática envolvendo os triângulos retângulos, muito usado em diversas áreas, foi o teorema de Pitágoras: num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Dada sua fama, alunos de todos os níveis de ensino, em algum momento da vida acadêmica, já ouviram alguma referência acerca do teorema, utilizado para relacionar medidas entre os lados do triângulo retângulo, cuja Figura 4 apresentamos a seguir.

Figura 4 – Relação entre os lados do triângulo retângulo



Fonte: o autor, 2019.

Segundo a lenda, como prova de gratidão por ter demonstrado esse teorema, Pitágoras sacrificou 100 bois aos deuses. Mas, como os trabalhos de

Pitágoras e de seus seguidores se perderam com o tempo, durante séculos houve dúvidas acerca da demonstração desse teorema feita por Pitágoras.

Segundo Boyer (1996), outros matemáticos da época, antes de Pitágoras, conheciam o teorema, mas nenhum deles havia conseguido demonstrar que era válido para qualquer triângulo reto. Mediante a demonstração, a História encarregou-se de outorgar a Pitágoras o feito pelo descobrimento de tal teorema.

No entanto, como é natural no processo de construção de conhecimentos matemáticos, outros povos destacaram-se na elucidação de conceitos relacionados à trigonometria, o que nos permitiu continuar a evolução dos conceitos agregados. Dessa forma, toda a trigonometria que estudamos hoje foi baseada no *seno* dos hindus. Depois do *seno*, outras *razões trigonométricas* foram sendo criadas: o *cosseno*, a *tangente,* entre outras, sempre a partir de um triângulo retângulo.

Bortoli, Marchi e Giongo (2016), ao abordarem o contexto histórico do ensino da trigonometria, salientam que o surgimento da Matemática ao longo da história evidenciou-se como uma manifestação cultural, com o objetivo de solucionar os problemas impostos pela humanidade. Ainda, segundo as autoras, esse processo fez surgir novas possibilidades de usabilidade da Matemática, que desencadearam novas ramificações, entre elas, a trigonometria. As autoras também asseveram que essa ramificação é um campo profícuo da Matemática e, por isso, está presente nos currículos do ensino da Educação Básica e em disciplinas básicas de alguns cursos superiores.

Ciente da complexidade implícita ao assunto, inicialmente, é necessário reportar-nos às premissas de Fonseca (2010, p. 29):

> Seria muita pretensão de minha parte escrever algo novo sobre o Histórico da Trigonometria, mesmo porque não reuni uma variedade de literatura suficiente para realizar tarefa tão árida, nem empreendi pesquisa nesse sentido, posto que não é esse o objetivo deste estudo.

A partir da asserção, elaboramos um breve contexto da evolução da história da trigonometria, com foco nos seus feitos, partindo dos achados de Boyer (1996) e de Ribeiro (2015). Nesse sentido, por meio do panorama que por ora apresentamos, faremos inferências a respeito do desenvolvimento histórico da trigonometria e da construção dos conceitos das *razões trigonométricas fundamentais do triângulo retângulo*, aportados nas civilizações antigas.

De acordo com Boyer (1996), na antiguidade, os homens, em busca de explicações acerca dos fenômenos periódicos, impulsionaram o desenvolvimento de Ciências como a Astronomia, a Cosmologia, a Geometria, as Engenharias de construção e o invento de máquinas. Consequentemente, essa busca fez emergir a necessidade de resolver problemas materiais e concretos, impulsionando as primeiras ideias de Matemática das civilizações mais antigas.

De acordo com os apontamentos, inferimos que a evolução histórica da trigonometria aconteceu a partir das respostas a perguntas contextualizadas em elementos práticos e vinculados a outras ciências. Essas interações motivaram o surgimento dos principais teoremas que constituem a trigonometria. Em face do exposto, realizamos um breve sobrevoo sobre acontecimentos históricos relacionados à trigonometria e ao triângulo retângulo, com o objetivo de fornecer alguns elementos que fomentem o seu contexto evolutivo. De acordo com Boyer (1996, p. 108),

> [...] a trigonometria, como os outros ramos da matemática, não foi obra de um só homem - ou nação. Teoremas sobre as razões entre lados de triângulos semelhantes tinham sido usados pelos antigos egípcios e babilônios. Dada a falta, no período pré-helênico, do conceito de medida de ângulo, tal estudo seria melhor chamado “trilaterometria”, ou medida de polígonos de três lados (triláteros).

Para ampliar a notoriedade da abordagem, Ribeiro (2015, p. 32) salienta que “os egípcios já relacionavam a sombra projetada de uma vareta com a propagação dos raios solares para medir a altura, permitindo a construção do relógio solar”. Esse é um caso clássico do princípio de propagação retilínea da luz, aplicada à semelhança de triângulos.

Nesse mesmo contexto, Souza, Victer e Lopes (2011) destacam que, na Grécia antiga, para resolver problemas cotidianos, Tales de Mileto também utilizava o princípio de propagação retilínea da luz. Registros históricos enfatizam que Tales, possivelmente, utilizou a semelhança entre triângulos para identificar a altura de pirâmides no Egito, a pedido de um faraó, como também calculou a distância compreendida entre um navio e o continente. Em relação ao fato anterior Souza, Victer e Lopes (2011, p. 16) asseveram que foi atribuída a Tales a demonstração do teorema: “se dois triângulos têm dois ângulos e um lado respectivamente iguais então eles são iguais”.

De acordo com Ribeiro (2015), a principal contribuição do povo egípcio a essa temática refere-se à utilização da trigonometria para solucionar problemas relacionados à questão da partilha de terra. Segundo o autor, os egípcios utilizavam uma regra chamada de 3-4-5, que significava dividir a terra a partir do traçado de triângulos retângulos com lados proporcionais a 3, 4 e 5 unidades, o que lhes permitia mensurar terrenos com grande exatidão.

Em outra instância, Rocha et al. (2002) chamam atenção para o fato de os povos babilônicos serem hábeis observadores do céu. Segundo os autores, estes desenvolveram consideravelmente a Astronomia e já conheciam cinco planetas e fenômenos como os eclipses lunares. Em relação à dimensão dos conhecimentos desses povos, Rocha et al. (2002, p. 44) destacam que eles já “[...] conheciam o número π com grande precisão, sabiam resolver equações do primeiro e segundo graus e, provavelmente, conheciam a aplicação do teorema de Pitágoras antes do sábio grego”.

Considerando o papel exercido pela Astronomia na época, vale referenciar que o grego Hiparco de Niceia, foi alcunhado como um dos mais céleres astrônomos da antiguidade e, posteriormente, reconhecido como o “pai da trigonometria”. Segundo Souza, Victer e Lopes. (2011, p. 52),

> [...] não se sabe exatamente quando se tornou comum dividir a circunferência em 360 partes, mas isso parece dever-se a Hiparco, assim como a atribuição do nome Arco de 1 grau a cada parte em que a circunferência ficou dividida. Ele dividiu cada arco de 1 grau em 60 partes obtendo o arco de 1 minuto.

Em razão do exposto, podemos denotar a importância do trabalho de Hiparco às futuras relações que viriam se estabelecer a partir dos conceitos explorados por ele. Dentre alguns focos, estão as concatenações de sua visão do campo da Astronomia para o modelo geocêntrico criado por Claudio Ptolomeu. De acordo com Souza et al. (2011, p. 55),

> A obra de Ptolomeu é essencialmente astronômica, mas os matemáticos têm interesse devido às identidades trigonométricas que ele utilizou a fim de

> reunir dados para a sua tábua de corda (que é aproximadamente uma tábua de senos). A circunferência foi dividida em 360 partes (agora chamadas graus), o diâmetro dividido em 120 porções e cada uma dessas foi dividida em 60 partes, de acordo com a primeira versão latina do Almagesto de 1155 d.C.

Nesse seguimento, destacamos que os hindus, posteriormente aos gregos continuaram com a aplicação da trigonometria à Astronomia. Contudo, Souza, Victer e Lopes (2011) explicitam que a trigonometria era meramente aritmética enquanto a trigonometria grega era geométrica.

O contexto histórico da trigonometria demonstra, por si, só o quão importante ela tem sido para o desenvolvimento da Matemática ao longo do tempo. Mesmo exaltando a importância das contribuições dos povos antigos nesse percurso, salientamos que somente no século XVII, a partir de Euler, é que a trigonometria alcança a sua forma atual. Souza, Victer e Lopes (2011, p. 63) asseveram que a "transição das *razões trigonométricas* para as funções periódicas começou com Viète no século XVI, teve novo impulso com o aparecimento do Cálculo Infinitesimal no século XVII e culminou com a figura de Euler". Os autores (p. 63-64) destacam que,

> Na geometria, álgebra, trigonometria e análise, encontramos simbologia, terminologia e ideias criadas por Euler. Por exemplo, a utilização da letra π, a utilização das letras minúsculas *a, b, c* para os lados de um triângulo e das maiúsculas A, B, C para os ângulos opostos vem também de Euler. Sobre as funções, ele introduziu as expressões *sen x, tan x* [...] e usou as abreviações *sen, cos, tang, cot, sec e cosec* […].

A partir de Euler, muitos fenômenos físicos que exprimem comportamentos cíclicos, como ondulatória, movimentos harmônicos simples, ondas eletromagnéticas, passaram a poder ser estudados a partir das funções trigonométricas. Assim, a trigonometria, no início uma auxiliar da Agrimensura e da Astronomia, tornou-se primeiramente autônoma e, por fim, transformou-se em uma parte da Análise Matemática, expressando relações entre números complexos, sem necessidade de recorrer a arcos ou ângulos.

Nesse sentido, o conhecimento do como e do porquê do surgimento de um novo conceito e quais as transformações e evoluções por ele sofrido faz-se necessário para o entendimento das suas aplicações modernas. Ademais, acreditamos que o estudo histórico do surgimento de um conceito é importante, pois evidencia os obstáculos epistemológicos do processo de construção do saber matemático. A análise desses obstáculos, vividos pelos matemáticos no passado, nos ajudam a compreender as dificuldades dos alunos de hoje e, por outro lado, o nosso entendimento da própria História e evolução da Matemática pode ser ampliado a partir da análise dos erros e embaraços dos nossos estudantes (ARSAC, 1987; SIERPINSKA, 1985; VERGNAUD, 1994).

Perspectivando sintetizar a abordagem, apresentamos no Quadro 2, o que consideramos a partir do sobrevoo histórico feito uma aproximação do contexto evolutivo conceitual da trigonometria, que por vezes se funde ao surgimento do triângulo, quiçá do triângulo retângulo. Fazemos saber, que o mesmo foi adaptado a partir do estudo desenvolvido por Santos (2017), o qual apresenta, a nosso ver, as principais contribuições evolutivas das noções de trigonometria entre as civilizações antigas, apresentando o período de ascensão, os estudiosos responsáveis, seus feitos, as principais técnicas utilizadas, as noções aplicadas e o estágio correspondente para seu desenvolvimento.

Quadro 2 – Evolução histórica das noções de trigonometria.

Principais atributos	Evolução Histórica			
	Pré-história (Aparecimento dos seres humanos na terra, até o desenvolvimento da escrita, cerca de 3.500 a. C.)	**Idade Antiga ou Antiguidade** (4.000 a. C. a 3.500 a. C.) – 476 d.C.	**Idade Média** Séc. V ao XV – (467 – 1453)	**Idade Moderna** 1453 – 1789
Estudiosos	Iranianos, egípcios, indianos, gregos, chineses, babilônios e mesopotâmios.	Babilônios, mesopotâmios, egípcios, gregos, romanos, chineses e indianos.	Indianos e gregos.	Europeus.
Motivação	• Mudanças climáticas; • Compreensão do tempo; • Movimento dos astros celestes.	• As fases da lua; • Os pontos cardeais; • As estações do ano; • Calendário astrológico.	• Mudança de Técnica; • Previsão astrológica; • Separação da Trigonometria da Astronomia.	• Simbolismo algébrico; • Invenção do cálculo infinitesimal e descoberta do domínio complexo.
Feito	• Calcular o comprimento da sombra.	• Analisar as fases da lua, os pontos cardeais e as estações do ano; • Medir distâncias, comprimentos e profundidades.	• Resolução de um triângulo.	• Transformação da linguagem verbal em algébrica; • Construção de tábuas trigonométricas; • Calculo sem 1' com treze casas decimais.
Técnica utilizada	• Tabulação de sequências numéricas que relacionavam comprimentos de sombras às horas do dia.	• Resolução de figuras planas; • Resolução de figuras esféricas; • Utilização de analisar.	• Resolução de triângulos planos ou esféricos.	• Interações entre análise numérica e geométrica.
Noções aplicadas	• Medidas de tempo; • Ângulos; • Triângulos; • Semelhança; • Proporcionalidade; • Esfera celeste.	• Triângulo retângulo; • Trigonometria primitiva; • Relações trigonométricas; • Ângulo e medição de ângulos; • Trigonometria esférica.	• Relações métricas nos triângulos planos ou esféricos; • Noções de quantidades variáveis.	• Razões trigonométricas; • Funções trigonométricas; • Séries infinitas.

Elaborado pelo autor, a partir de Santos (2017, p. 59).

Em face das concatenações históricas apresentadas, inferimos que o estudo da trigonometria perpassou por algumas fases, assim como os próprios triângulos. Se o tomarmos como a ciência analítica estudada atualmente, teremos a origem no século XVII, após o desenvolvimento do simbolismo algébrico. Mas, se considerarmos a geometria acoplada à Astronomia, as origens remontarão aos trabalhos de Hiparco, no século II a.C., embora existam traços anteriores de seu uso. Se considerarmos, ainda, esse estudo com base nas medidas do triângulo, a origem será no segundo ou terceiro milênio antes de Cristo.

Neste sentido, estudar a história da trigonometria também permite observar o surgimento e o progresso da Análise e da Álgebra, campos da Matemática nela contidos de forma embrionária. Corroborando a asserção, Oliveira (2013. p. 90) destaca que, “hoje, com o avanço da tecnologia e com uma gama de conhecimento em mãos, o homem é capaz de aplicar a trigonometria em vários ramos da atividade humana”. De acordo com o autor, muitas profissões utilizam os conhecimentos de trigonometria para realizar tarefas inerentes ao seu campo de atuação. Segundo Oliveira (2013, p. 90), “as aplicações da trigonometria na atualidade são, incontestavelmente, indispensáveis para o avanço das ciências como um todo”.

Ainda com Oliveira (2013), uma das aplicações da função trigonométrica na medicina é mostrada no monitoramento da frequência cardíaca, isto é, do número de batimentos cardíacos em um período de tempo, geralmente medido em *bpm* (batimentos cardíacos por minuto). Deste monitoramento, podemos verificar a pressão sanguínea ou arterial de uma pessoa. A variação da pressão sanguínea (em *mm* Hg), em função do tempo (em *s*), é uma função trigonométrica (cíclica ou periódica).

Outra contribuição pode ser observada no estudo de conceitos da Física. Para Oliveira (2013), as funções trigonométricas *seno*, *cosseno* e *tangente* estão presentes em diversos ramos da Física, auxiliando nos cálculos relacionados à Cinemática, Dinâmica, Óptica entre outras. Dessa forma, Matemática e Física caminham juntas com o objetivo único de fornecer conhecimentos e ampliar novas pesquisas.

No estudo de refração também encontramos a presença da trigonometria. O fenômeno da refração consiste na mudança de direção de propagação de um feixe de luz ao passar de um meio para outro. Isto só pode ocorrer quando a luz se propaga com velocidades diferentes nos dois meios.

Para Máximo e Alvarenga (2011), existem vários exemplos de aplicação, como na Cinemática: no Movimento Curvilíneo no estudo de Vetores e também no lançamento oblíquo, onde a altura máxima atingida, o tempo de subida e o alcance horizontal são alguns dos elementos calculados a partir das funções trigonométricas. De acordo com o ângulo formado entre o lançamento e a superfície, o corpo pode percorrer diferentes trajetórias dependendo do ângulo de inclinação.

Em outra vertente, ao aludir acerca das aplicabilidades Oliveira (2013) enfatiza que a Engenharia é a ciência e a profissão de adquirir e de aplicar os conhecimentos matemáticos, técnicos e científicos na criação, aperfeiçoamento e implementação de utilidades, tais como materiais, estruturas, máquinas, aparelhos, sistemas ou processos, que realizem uma determinada função ou objetivo. De acordo com a referida autora, nos processos de criação, aperfeiçoamento e implementação, a Engenharia conjuga os vários conhecimentos especializados no sentido de viabilizar as utilidades, tendo em conta a sociedade, a técnica, a economia e o meio ambiente. Oliveira (2013, p. 102) assevera que “em alguns ramos a trigonometria se torna peça chave na execução de projetos”.

A autora exemplifica o uso da trigonometria em algumas Engenharias, tais como na Engenharia Aeronáutica. Nesta, detém-se conhecimentos fundamentais para a elaboração de projetos de aeronaves – aviões comerciais jatos supersônicos, helicópteros e até mesmo foguetes. Segundo Youssef et al. (2008), para desenhar peças tridimensionais do motor ou da fuselagem de um avião, o engenheiro precisa entender de projeções. Para calcular a inclinação correta que as asas de uma aeronave devem ter para decolar e aterrissar de maneira segura são necessários conhecimentos de trigonometria aliada aos modelos matemáticos que descrevem a sustentação de um avião no ar. Para Youssef et al. (2008), além de participar da construção e da manutenção de peças mecânicas ou equipamentos eletrônicos na indústria aeronáutica, esse profissional tem também a alternativa de se especializar em tráfego aéreo.

Seguindo essa linha de raciocínio, Oliveira (2013) chama atenção para o ramo da Engenharia Civil, que projeta, gerencia e executa obras como: casas, edifícios, pontes, viadutos, estradas, barragens, canais e portos. Com base nesses dados, o profissional desenvolve o projeto, especificando as redes de instalações elétricas, hidráulicas e de saneamento do edifício e definindo o material que será usado (PIMENTA; OLIVEIRA, 2004). Assim, de acordo com estes autores, independente da área em que for atuar o engenheiro civil, necessita de uma bagagem de conhecimentos matemáticos para obter sucesso em seus projetos. Em particular, as aplicações da trigonometria são importantes. Ela é usada no cálculo do projeto estrutural de construção civil, na construção de um telhado ou numa rampa de acesso, bem como em projetos envolvendo estruturas e fundações e de infraestrutura no que compete projetar e construir obras como rodovias, ferrovias, viadutos, portos, metrôs, túneis e viadutos (OLIVEIRA, 2013).

Para Filho (1998), no projeto geométrico de rodovias, encontramos o uso da trigonometria em praticamente todas as etapas, como, por exemplo, o cálculo da superelevação. Ou seja, quando um veículo chega a uma curva, é preciso que haja uma força na direção do centro da curva (força centrípeta), sem a qual o veículo não descreverá a curva, mas continuará em movimento retilíneo pelo princípio da inércia.

Apresentadas algumas possibilidades de utilização da trigonometria, reiteramos que o nosso interesse foi trabalhar situações em que o aluno pudesse construir conhecimento significativo acerca da construção e aplicação, das *razões trigonométricas*, *seno*, *cosseno* e *tangente* no 9º Ano do Ensino Fundamental da Educação Básica. Assim, desenvolvemos uma *sequência didática* que se utilizou de variados recursos, como: *internet*, uso de aparelhos celulares, computadores, *tablets*, aplicativos *(Bubb.us, WhatsApp), software GeoGebra*, projeção de *slides*, atividades experimentais, leitura de textos, aula expositiva dialogada e aula de campo (para observação e comprovação prática das situações teóricas).

Nessa pesquisa, buscamos levantar indícios de aprendizagem significativa do estudo das *razões trigonométricas no triângulo retângulo*, concentrando-nos na abordagem do assunto pertinente ao nível de ensino, foco da pesquisa. A fim de reafirmarmos nossas convicções em relação às possibilidades de ensino e de aprendizagem por intermédio da utilização de diversos recursos de ensino já explicitados, apresentamos, na próxima seção, um estado da arte ancorado em teses, dissertações e artigos, que retratam o ensino da Matemática atual.

2.5 O estado da arte

Os campos de aplicações das *razões trigonométricas no triângulo retângulo* se estendem por várias áreas do conhecimento, como a Matemática, Física, Química, Engenharias, Biologia entre outras. Podemos supor que é um ramo de essencial importância da trigonometria, sobre o qual recai o foco do presente estudo. Mesmo denotada a importância das aplicabilidades do conteúdo, conforme apresentado na seção anterior, destacamos que em geral, há dificuldades em torno de seus processos de ensino e de aprendizagem.

De acordo com Oliveira (2013), uma das problemáticas destacadas frente ao ensino das *razões trigonométricas no triângulo retângulo* está no baixo rendimento dos alunos. Um número expressivo de estudantes não consegue fazer relação da teoria com a prática, tampouco relacioná-la com uma situação real do seu cotidiano. Em face do exposto, pesquisas vêm sendo realizadas, a fim de desenvolver metodologias que possam contribuir para um melhor aproveitamento do conteúdo.

Sendo assim, o presente trabalho buscou subsídios em pesquisas realizadas sobre a trigonometria e *as razões trigonométricas no triângulo retângulo* e correlatas, com intuito de analisar as metodologias, recursos e teorias que vêm sendo utilizadas para contribuir com o ensino e aprendizagem desse conteúdo. O intuito foi elencar as contribuições e possíveis alternativas para desenvolver um ensino significativo para o aluno.

Nesse percurso, buscamos por trabalhos relacionados à temática na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), que integra os sistemas de informação de teses e dissertações existentes nas instituições de ensino e pesquisa do Brasil. Utilizamos os seguintes critérios para a seleção.

Data de Publicação: 2010 a 2018.

Tipo de Recurso: teses e dissertações.

Palavras chaves da pesquisa: Ensino de Trigonometria. Sequência Didática. Engenharia Didática. Diferenciação Progressiva. Reconciliação Integradora. Por esse instrumento, fizemos uma busca com as palavras combinadas, para verificarmos se a procura ensejava ao que demandávamos.

O processo foi delineado conforme o Quadro 3 apresentado abaixo:

Quadro 3 – Filtros de buscas utilizados.

Palavra(s) chave(s)	Número de trabalhos
Triângulo retângulo; Ensino Fundamental	24
Aprendizagem significativa; Ensino Fundamental	1409
Ensino fundamental, Tecnologias de ensino	2155
Aprendizagem significativa; Ensino Fundamental; Tecnologias de ensino	316
Aprendizagem significativa; Triângulo retângulo; Tecnologias de ensino	3
Aprendizagem significativa, Ensino Fundamental; Triângulo retângulo	10
Aprendizagem significativa, Ensino Fundamental; Triângulo retângulo; Tecnologias de ensino	1

Fonte: o autor, 2019.

Do montante, visualizado no quadro 3, inicialmente selecionamos 78 trabalhos dado o grau de proximidade com a abordagem do que pretendíamos desenvolver durante a pesquisa. Após a triagem, foram identificadas 12 teses e 66 dissertações. A partir da escolha fizemos a leitura dos resumos, questão norteadora e objetivo. Terminado o levantamento, observamos que somente 16 trabalhos contemplavam as características procuradas. Dentre os trabalhos elencados, 3 são teses e 13 são dissertações.

No Quadro 4 apresentamos a análise das teses e dissertações selecionadas, apresentando um panorama em relação ao autor, título, ano de publicação e repositório no qual se encontram indexadas. Com a intencionalidade de usarmos e mencionarmos os trabalhos posteriormente, as teses e dissertações serão designadas por Ti; Di, com i = 1, 2, 3...13.

Quadro 4 – Pesquisas analisadas.

Item	Autor	Título	Instituição/ UF/ Repositório	Ano de Publicação
D1	SANTOS, Marden Eufrásio dos	Ensino das relações métricas do triângulo retângulo com robótica educacional	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas – AM http://repositorio.ifam.edu.br/jspui/handle/4321/57	2016
D2	REIS, Antônio Fernando	Ensinando operações com grandezas físicas vetoriais no ensino médio através de uma unidade de ensino potencialmente significativa	Universidade Federal de São Carlos – SP https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/8305	2016
D3	SANTOS, Jamison Luiz Barros	Uma sequência didática para a aprendizagem das noções de trigonometria fundada na teoria das inteligências múltiplas	Universidade Federal de Sergipe – SE https://ri.ufs.br/handle/riufs/5129	2017
D4	MASCARIN, Lucimar Aparecida	A utilização de atividades lúdicas e exploratórias no ensino e aprendizagem de matemática	Universidade de São Paulo – SP http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-06122017-094120/pt-br.php	2017
D5	PÊGO, Rudnei Nunes	O Ensino-aprendizagem de Matemática Através de Projetos Envolvendo Profissões: um Estudo de Caso no Ensino Fundamental.	Universidade Federal do Espírito Santo – ES http://repositorio.ufes.br/handle/10/4807	2013
D6	LEITE, Rondineli Schulthais	O Ensino de parte da Geometria do Ensino Fundamental: análise de dificuldades e sugestão de sequência didática.	Universidade Federal do Espírito Santo – ES http://repositorio.ufes.br/handle/10/4809	2013

D7	SILVA, Everaldo Raiol da	O surgimento das trigonometrias em diferentes culturas e as relações estabelecidas entre elas.	Universidade Federal do Pará – PA http://repositorio.ufpa.br/jspui/handle/2011/8551	2014
D8	PEREIRA, Cicero da Silva	Aprendizagem em trigonometria no ensino médio contribuições da teoria da aprendizagem significativa	Universidade Estadual da Paraíba – PB http://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UEPB_64616d3762020c465f7692eb0404cc2c	2011
D9	OLIVEIRA, Juliana Elvira Mendes de	A trigonometria na educação básica com foco em sua evolução histórica e suas aplicações contemporâneas	Universidade Federal de Viçosa – MG http://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UFV_61e00eae076a168440792d454c4cd9b0	2013
D10	OCANHA, Mariane	Uma introdução à trigonometria com aprendizagem significativa	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – MS http://repositorio.cbc.ufms.br:8080/jspui/handle/123456789/2888	2016
D11	FERNANDES, Ricardo Uchoa	Estratégias pedagógicas com uso de tecnologias para o ensino de trigonometria na circunferência.	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – SP https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11445	2010
D12	SILVA, Evelyn Gabrielle Monteiro Gomes da	Contextualização histórica para o estudo da trigonometria e construção do teodolito no Ensino Fundamental	Universidade de Brasília – DF http://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UNB_3e9c62b83a70410d40c21f632d7244d2	2015
D13	BORTOLI, Gladis	Um olhar histórico nas aulas de trigonometria: possibilidades de uma prática pedagógica investigativa	Universidade do Vale do Taquari – RS <http://hdl.handle.net/10737/281>.	2012
T1	RIBEIRO, Tiago Nery	O Ensino de razões trigonométricas no triângulo retângulo a partir de situações aplicadas à	Universidade Anhanguera de São Paulo – SP	2015

		Física: um estudo baseado nas Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS)	https://s3.amazonaws.com/pgsskroton-teses/94d31c20ec58a2fad699c638c7e87861.pdf	
T2	BORSSOI, Adriana Helena	Modelagem matemática, aprendizagem significativa e tecnologias: articulações em diferentes contextos educacionais	Universidade Estadual de Londrina – PR http://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UEL_25102658f9d96165d54ed420aff99775	2013
T3	BULEGON, Ana Marli	Contribuições dos objetos de aprendizagem, no ensino de física, para o desenvolvimento do pensamento crítico e da aprendizagem significativa	Universidade Federal do rio Grande do Sul – RS http://bdtd.ibict.br/vufind/Record/URGS_9d0e96a4767499c88f1d528dca9b4b87	2011

Elaborado pelo autor, 2019.

Por meio dos dados levantados, onde identificamos um número considerável de produções acadêmicas, foi possível destacar as instituições nacionais que estão explicitamente focadas na realização de pesquisa e em discussões em grupos de pesquisas relacionadas ao ensino da trigonometria, suas aplicações e seu contexto histórico. Feito o diagnóstico, percebemos a importância deste tema não só para o contexto da Matemática, mas para a construção e percepção da relação do conhecimento humano com as questões presentes no seu dia a dia.

Nessa perspectiva, de posse dos trabalhos selecionados, realizamos uma leitura complementar criteriosa dos estudos, com o intuito de entender os objetivos, as questões norteadoras, a teoria de aprendizagem e o suporte teórico imbricado. Assim, foi possível evidenciar possíveis pontos de convergência existentes entre eles. Para estabelecermos as inter-relações de informações relacionadas nos textos, levamos ainda em consideração os aspectos metodológicos e os descritores de busca já mencionados anteriormente. Para ilustrar esse cenário e potencializar a compreensão acerca dos critérios adotados para nos situar entre os caminhos percorridos em cada um dos trabalhos, destacamos, no Quadro 5, uma síntese dos parâmetros mencionados:

Quadro 5 – Síntese das dissertações e teses

Item	Objetivo	Questão norteadora	Teoria de Aprendizagem	Principais aportes teóricos	Metodologia	Principais resultados
D1	Desenvolver um planejamento de ensino que integrasse Robótica Educacional no ensino das Relações Métricas do Triângulo Retângulo.	Como planejamento de ensino que prima pela inserção de Robótica Educacional pode melhorar a aprendizagem das Relações Métricas do Triângulo Retângulo, no que diz respeito a capacidade de visualização e aplicação de propriedades das figuras geométricas e o desenvolvimento do raciocínio dedutivo por estudantes no Ensino Fundamental do 9° ano?	a) Teoria do Alinhamento Construtivo.	a) Parâmetros Curriculares Nacionais (1998); b) Biggs e Tang (2011).	Metodologia LEGO® ZOOM – utilizada para as atividades práticas com Robótica Educacional; Como instrumentos de coleta de dados foi utilizado um questionário sócio-econômico-acadêmico e questionário de experiências e melhorias. A investigação foi conduzida como um estudo de caso na perspectiva de Yin (2010).	Os resultados do estudo de caso revelaram uma melhoria na aprendizagem dos alunos, sendo que os índices mais significativos foram alcançados no desenvolvimento da habilidade de visualização e aplicação das propriedades geométricas. No que diz respeito à segunda habilidade – desenvolvimento do raciocínio dedutivo para resolução de problemas – os resultados obtidos foram mais modestos, pois o desenvolvimento dos cálculos prescindia conhecimentos sobre as operações aritméticas, cujo domínio pelos estudantes era limitado, mesmo tratando-se de estudantes no último ano do Ensino Fundamental.
D2	Desenvolver e aplicar uma sequência didáticas, por meio de uma Unidade de Ensino de Potencialmente Significativa-UEPS,	Não definida	Teoria de Aprendizagem Significativa – David Ausubel.	Moreira e Masini (2011).	A pesquisa denominada de qualitativa teve como foco o uso de tecnologia informática e por vezes tecnologias mais tradicionais como papel,	A utilização da sequência apontou evidências da ocorrência de aprendizagem significativa por parte dos alunos. A investigação concluiu que o estilo memorização por parte do

	para ensinar operações com vetores, comumente trabalhadas na Geometria Analítica.				lápis e multimídia. Como instrumento de coleta para análise, o autor utilizou mapas conceituais.	aluno e narrativa por parte do professor mostra que a maneira clássica de ensinar, leva a uma aprendizagem mecânica e não significativa.
D3	Analisar as potencialidades das Inteligências Múltiplas reconhecidas por Gardner, para auxiliar a mobilização da aprendizagem das noções de Trigonometria através de uma Sequência Didática.	Como mobilizar a aprendizagem das noções de Trigonometria (razões trigonométricas no triângulo retângulo – seno, cosseno e tangente) no 9º ano do Ensino Fundamental segundo a Teoria das Inteligências Múltiplas?	Teoria das Inteligências Múltiplas.	Gardner (1995); Fonseca (2002, 2010, 2012, 2015).	O método investigativo da pesquisa foi encaminhado de acordo com o paradigma positivista, numa abordagem qualitativa. A Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau, foi utilizada como suporte metodológico numa relação com a Engenharia Didática. Como fonte de coleta de dados foram utilizadas as falas dos alunos em debates relacionados a temática e um questionário de duas perguntas.	Segundo o autor, ao final da experiência, percebeu-se que a aprendizagem dos alunos no tocante, as razões trigonométricas no triângulo retângulo, culminou de maneira significativa ao inter-relacionar-se com a Teoria das Inteligências Múltiplas. Os resultados detectados pressuporão uma ampliação da busca pela compreensão dos conteúdos direcionados a aprendizagem das noções de Trigonometria.
D4	Apresentar uma sequência didática envolvendo noções de semelhança de triângulos, trigonometria no	Não definida.	Teoria Construtivista de Vygotsky.	Vygotsky (1988); André (1995); Oliveira (1995).	Abordagem qualitativa com aproximação de uma pesquisa-ação. Nesta foram utilizados como instrumento de	Como resultados, verificou-se que o uso de atividades lúdicas e exploratórias propiciou um maior envolvimento dos alunos na busca de conhecimentos

	triângulo retângulo, comprimento da circunferência e área do círculo, com o uso de atividades lúdicas e exploratórias.				coleta observação participante, a entrevista intensiva e a análise de documentos.	acerca dos temas tratados (e também da professora-pesquisadora), de maneira a despertar o raciocínio crítico e reflexivo, conduzindo-os a uma aprendizagem mais significativa, além de possibilitar o desenvolvimento pessoal quanto a habilidades e atitudes.
D5	Elaborar uma possibilidade de ensino/aprendizagem de alguns conhecimentos da matemática, de uma determinada série (ano), e aplicá-la através de projetos práticos relacionados a uma profissão de interesse da turma.	Não definida.	Teoria Construtivista de Piaget.	Piaget (1977); Sugimoto (2009); Solé (2003); Freire (1996); Ponte (1992); Candau (2002).	Foi conduzida como estudo de caso Gil (2002), através de uma abordagem qualitativa. Nesta, falas e comportamentos dos alunos, registrados durante a execução do projeto, por meio de fotos, vídeos e anotações, foram elementos importantes para serem analisados, assim como os relatórios produzidos por eles.	Os resultados demonstraram-se positivos: os alunos se mostraram comprometidos e motivados; aumentou sua autoestima; diminuiu a resistência em relação à Matemática e a distância entre teoria e prática; estimulou o trabalho em equipe, melhorando as relações professor-aluno e aluno-aluno; e melhorou significativamente o desempenho dos alunos nas avaliações comparado a outras turmas ou a essas mesmas turmas em outros conteúdos.
D6	Construir um aprendizado sistemático e eficaz de parte dos mais importantes conceitos geométricos do nono ano do ensino	Não definida.	Não definida.	Paques et al. (2002); Oliveira (2007); Silveira e Bisognin (2008).	Abordagem quantitativa do tipo investigativa com alunos e professores. As atividades foram apresentadas em série, ou seja, através de uma sequência didática	Evidenciou-se que há conhecimento precário ou o desconhecimento significativo dos conteúdos geométricos analisados, mesmo por alunos de bom rendimento. Esses, segundo o autor, são frutos de um ensino que renega a

	fundamental, utilizando o software GeoGebra como instrumento inovador na construção de uma sequência didática que contribua de forma significativa na compreensão dos conteúdos geométricos.				ensejaram os dados coletados que se deram a partir de questionários investigativos.	prática do aprendizado geométrico. Outra constatação é que prática tradicional de apresentação dos conteúdos geométricos através de exposições e exemplificações, seguidos de exercícios similares com pouca utilização de recursos diferenciados como material concreto e instrumentos são ineficientes para construção de uma aprendizagem significativa. Os alunos apresentaram extremas dificuldades em resolver problemas simples, com mais de 94% de respostas inadequadas em todas as questões vinculadas aos assuntos. O pouco conhecimento apresentado pelos alunos está associado ao treinamento exaustivo na utilização de fórmulas decoradas, como é feito com o teorema de Pitágoras, com as relações métricas no triângulo retângulo e com a trigonometria.
D7	Reconhecer, com auxílio da história da matemática e da ciência, e fundamentado na pesquisa	Com fundamentos na história da matemática e na história da ciência, como podemos identificar o surgimento das trigonometrias nas	Não definida.	D'Ambrosio (2007); Ronan (1987), Wussing (1998), Morey (2001, 2003), Cajori (2007),	Pesquisa bibliográfica embasada em Lakatos & Marconi (1986). A coleta se deu a partir das contribuições teóricas	Comprovou-se por meio da história e situações históricas que a trigonometria atribuída a diferentes povos antigos estavam concatenadas em no mínimo um ponto: buscar

	bibliográfica, como surgiram as trigonometrias nas civilizações dentre elas: Egípcia, Babilônica, Grega, Hindu, Árabe e Chinesa e quais as relações estabelecidas entre elas ao longo da história o posterior surgimento da geometria não-euclidianas e o desenvolvimento da geometria esférica e sua implicação com a trigonometria esférica.	diferentes civilizações e as relações estabelecidas entre elas?		Mendes (2009), Pereira (2010, 2013), Katz (2010), Rooney (2012), Rosa (2012), Brummelen (2009, 2013), Flood & Wilson (2013).	de vários autores que desenvolveram teses, dissertações e produziram livros sobre as formas de utilização da história matemática e história das ciências.	respostas a situações práticas do cotidiano.
D8	Apresentar uma abordagem pedagógica ao ensino de Trigonometria para um curso noturno, que seja adequada às demandas educacionais atuais.	Não possui.	Teoria de Aprendizagem Significativa – David Ausubel.	Ausubel, Novak e Hanesian (1983); Brighenti (2003); Novak (1981); Novak e Gowin (1996); Moreira (2006); Jonhson-Laird (1983); Boyer (1975).	A pesquisa qualitativa desenvolveu-se a partir de uma intervenção didática em uma turma de 2º Ano do Ensino Médio. Os dados foram coletados a do instrumento do mapa conceitual.	Os resultados obtidos permitem confirmar a necessidade e importância de trabalhar os conhecimentos prévios antecipadamente e a possibilidade de abordagens que não envolvam apenas fórmulas e algebrismos excessivos que tornam o aprendizado mecânico e sem significado para o aluno.
D9	Apresentar uma proposta metodológica em que o estudante possa	Não possui.	Não definida.	D´Ambrosio (2010); PCN Matemática; Ausubel, Novak e	Pesquisa qualitativa e utilização de uma sequência didática com uso de recursos de	A historia contribui para as aulas de Trigonometria serem produtivas; Que trabalhar com materiais concretos ou

	perceber a importância da Trigonometria também a partir de atividades práticas e utilização de recursos multimídia.			Hanesian (1983); Boyer (1975); Barbosa (2003); Bortoli (2012).	multimídia.	situações problemas na Educação Básica, são de grande importância pra a consolidação da aprendizagem; Que o computador é uma ferramenta potencialmente produtiva nas aulas de Matemática.
D10	Dar sentido ao ensino de Trigonometria proposto pelo currículo das escolas de Educação Básica, utilizando como ferramenta de auxílio pedagógico, a teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel.	Não definida.	Teoria de Aprendizagem Significativa (TAS) – David Ausubel.	Neto (1994); Ausubel (1968); Moreira (2009); Macedo; Romanini (2014).	Estudo dirigido utilizando computador. De acordo com a atividade desenvolvida, também foram utilizados outros materiais para confecção dos triângulos.	Ressalta-se a importância dos aprendizes serem educados de uma maneira diferente, sendo instigados a pensar e a construir novos saberes a partir de bases concretas. Que a modernização dos processos de ensino e de aprendizagem mantém uma relação de reciprocidade com a aprendizagem significa por meio de seus encaminhamentos.
D11	A construção da aprendizagem significativa dos conceitos básicos da trigonometria, especificamente os conceitos seno e cosseno, e sua representação no plano cartesiano, abordando o erro e usando-o como recurso para tal aprendizagem, entre	Não definida.	Teoria de Aprendizagem Significativa (TAS) – David Ausubel.	Ausubel (2003); Moreira e Masini (1982); Moreira (2006), (2009).	Engenharia Didática com base em realizações didáticas em sala de aula. Foram elencadas as tecnologias tradicionais e informáticas para o aporte do estudo. O registro das atividades dos alunos utilizando papel e lápis juntamente com a observação do	Os resultados evidenciaram que a mobilização dos conhecimentos prévios quanto a aquisição de novos pode ser incrementada por adoção de estratégia pedagógica com uso de tecnologias. Também foi evidenciado que a construção dos conhecimentos de forma significativa não prescinde do uso reconstrutivo do erro como ferramenta didática.

	alunos de uma classe de 2º ano do Ensino Médio, utilizando para a construção do significado mídias como o lápis, régua, transferidor e, posteriormente, a informática com o software GeoGebra.				desempenho nas atividades com uso do computador serviu como instrumentos avaliativos na pesquisa.	
D12	Verificar a viabilidade do ensino da Matemática/ Trigonometria através de aulas contextualizadas com o histórico de cada conteúdo a ser trabalhado em sala de aula e o uso da ferramenta de construção do teodolito, instrumento utilizado para trabalhar com trigonometria.	Não definida.	Teoria Construtivista de Vygotsky.	Piaget (1984); Freire (2011); Tapia (2006); Vergnaud (1984).	Qualitativa exploratória. A coleta foi baseada em acertos erros dos alunos diante a resolução das atividades propostas.	O uso da contextualização histórica sobre cada conteúdo motivou os alunos a realizarem atividades diferentes da usual. A história da Matemática despertou a curiosidade em cada conteúdo estudado. A construção e utilização do Teodolito melhorou a autoestima da turma nas aulas de Matemática, fazendo com que os alunos tivessem uma maior satisfação e aceitação em participar das aulas. As atividades de campo ajudaram a tirar dúvidas, pois os discentes puderam sair do ambiente da sala de aula e aplicar os conhecimentos adquiridos em uma atividade diferenciada que aplicava a Trigonometria de forma contextualizada.

D13	Problematizar, junto a um grupo de alunos do Ensino Médio, a construção de conhecimentos vinculados à trigonometria no triângulo retângulo.	Quais as possibilidades da inserção da História da Matemática no ensino e na aprendizagem da Trigonometria presente no triângulo retângulo no Ensino Médio, tendo como aporte teórico o campo da Etnomatemática?	Programa Etnomatemática.	D'Ambrósio (1986, 1997, 2004, 2008. 2009a, 2009b, 2010); Knijnik (2010); Galvão (2008); Gerdes (2010); Boyer (2010).	Caracterizada de qualitativa tendo as aulas gravadas e o registro dos materiais construídos foi feito por meio de fotografias e/ou filmagens. Ademais questionário, palestras e entrevistas com profissionais da construção civil.	Os resultados evidenciaram que é possível fazer uso da História da Matemática e da vertente Etnomatemática para o aprendizado da Trigonometria no Ensino Médio, articulando teoria e prática. A pesquisa revelou que a abordagem aplicada tornou o processo de ensino e de aprendizagem mais interativo, construtivo e participativo, provocando o envolvimento dos alunos. Os alunos conseguiram estabelecer relações entre a matemática escolar e os saberes matemáticos culturais.
T1	Investigar o desenvolvimento da aprendizagem de alunos em situações de ensino desenvolvidas em uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS) sobre conceitos referentes ao conteúdo razões trigonométricas no triângulo retângulo, a partir de conteúdos	Quais compreensões os alunos possuem sobre as dificuldades na aplicação das situações da trigonometria aplicada a Física.	Teoria de Aprendizagem Significativa – David Ausubel.	Ausubel (1978, 2003); Novak (1981, 1984); Gowin (1984); Moreira (1983, 2011); Lemos (2011); Peña, 2005; Robert (1997).	Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS) – enquadrada numa abordagem do tipo qualitativa, que utilizou elementos do Design Experiment. A coleta dos dados: análise prévia, atividades na UEPS e análise final. Análise: mapa conceitual; questionários na UEPS a partir da Análise Textual	Os resultados da pesquisa permitiram concluir que: os conhecimentos prévios relevantes dos alunos influenciaram significativamente no desenvolvimento da UEPS, tornando-a potencialmente significativa, e contribuíram para uma nova postura na ação pedagógica do professor; as atividades norteadas em situações-problema de Física facilitaram a diferenciação progressiva e a reconciliação integrativa, fornecendo ligações entre os

	aplicados à Física.				Discursiva de Moraes e Galiazzi (2013).	novos conhecimentos e os conhecimentos prévios, motivando os alunos à busca do conhecimento de forma ativa e colaborativa; e observamos uma evolução conceitual dos alunos quanto ao conteúdo razões trigonométrica no triângulo retângulo, que foi identificada pelo aprimoramento da linguagem matemática utilizada na resolução das questões propostas.
T2	Investigar como ambientes de ensino e de aprendizagem que consideram atividades de modelagem matemática, dispõem de recursos tecnológicos e são organizados segundo os princípios de uma UEPS viabilizam a aprendizagem significativa dos estudantes.	A primeira questão busca identificar indicativos de diferenciação progressiva e de reconciliação integradora, princípios definidos na Teoria da Aprendizagem Significativa, quando os alunos se envolvem em atividades de modelagem matemática mediadas pela tecnologia. A segunda questão visa entender de que forma as atividades de modelagem matemática, integradas às referidas unidades de ensino, potencializam a	Teoria de Aprendizagem Significativa – David Ausubel; Teoria de Aprendizagem Significativa com uso de Tecnologias de David Jonassen.	Ausubel (1963, 2000, 2003); Cosenza e Guerra (2011); Novak (2011); Moreira (1997, 1999); Ausubel, Novak e Hanesian (1980); Moreira e Masini (2006); Novak e Gowin (1988). Howland, Jonassen e Marra, 2011); Cuban (2001); Ashburn e Floden, 2006); Bereiter e Scardamalia (1989); Bransford, Brown e Cocking (2000); Moreira	Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS) – abordagem do tipo qualitativa. A coleta se deu a partir da observação sistemática, registros dos alunos (atividades entregues no decorrer da unidade de ensino, sendo arquivos impressos ou eletrônicos); registros da professora da unidade de ensino e pesquisadora (relatórios elaborados após cada aula e ficha de acompanhamento das atividades dos grupos); arquivos de vídeo (tanto das aulas quanto dos	Contatou-se que a integração entre UEPS e modelagem matemática mediada pela tecnologia tem potencial para promover a aprendizagem significativa dos estudantes.

		aprendizagem significativa dos estudantes.		(2004).	encontros com os grupos para orientação dos trabalhos).	
T3	a) investigar as características dos objetos de aprendizagem usados no ensino de Física; b) identificar as modalidades de utilização de Objetos de Aprendizagem no ensino de Física.	Quais as potencialidades e contribuições de Objetos de Aprendizagem no desenvolvimento do pensamento crítico e da aprendizagem significativa no ensino de Física?	Teoria de Aprendizagem Significativa – David Ausubel; Teoria de Aprendizagem Significativa com uso de Tecnologias de David Jonassen.	Ausubel (1978, 2003); Jonassen (1996); Mandernac et al. (2009); Sendag e Odabasi (2009); Schon (2000); Saliés (2008); Vella (1994); Sendag e Odabasi (2009); Newman et al. (1995); Garrison (1992); Henri (1991); Tarouco et al. (2004); Rosa (1995); Fiolhais e Trindade (2003); Brizzi (2000); Araujo e Veit (2007); Beck (2001); Wiley (2000).	Pesquisa qualitativa e quantitativa. Instrumentos utilizados: testes, relatórios, questionários, exercícios e observações da interação dos estudantes com os objetos de aprendizagem, observações registradas no diário da prática pedagógica.	A análise dos percentuais mostra que, o uso dos OAs nas atividades de aprendizagem de Física proporcionaram um incremento positivo em todos os indicadores de pensamento crítico. Os OAs devem intencionalmente instigar o desenvolvimento do pensamento crítico em todos os aspectos, tal como elicitado no conjunto de indicadores de Newman ou em qualquer outro conjunto de indicadores de pensamento crítico. O estudo demonstra que os estudantes desenvolveram habilidades que proporcionaram a eles a aprendizagem sobre o assunto Termodinâmica e que esta foi significativa.

Elaborado pelo autor, 2019.

Um ponto interessante a ser destacado em relação aos trabalhos acadêmicos descritos e analisados no Quadro 6 é que os contextos das pesquisas são os mais variados, não se tratando somente de intervenções com alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental, mas também de níveis, Médio, Técnico e Superior, demonstrando a importância deste tema e de suas aplicações em diferentes níveis e áreas do conhecimento. Nesse sentido, destacamos a corroboração de Nacarato, Bredariol e Passos (2010), pois para estes autores, não se pode negar a importância da trigonometria para a Matemática e para as outras áreas do conhecimento. Segundo os referidos autores, a importância do uso das *razões trigonométricas no triângulo retângulo* como campo trigonometria e, consequentemente da Matemática, também pode ser observada a partir da sua presença nos currículos de todos os níveis de ensino.

Ao analisarmos os trabalhos de Leite (2013), Silva (2014) e Oliveira (2013), verificamos que ambos não apresentam, em seu escopo, uma teoria de sustentação para aprendizagem. Feita a observação, destacamos que Leite (2013) realizou pesquisa investigativa por meio de uma *sequência didática* de conteúdos geométricos utilizando o *software GeoGebra* com alunos e professores do 9° Ano, no intuito de observar as principais dificuldades dos estudantes no aprendizado da geometria e de verificar possíveis equívocos realizados nos processos de ensino e de aprendizagem desses conceitos.

A despeito do tema abordado por Silva (2014) e Oliveira (2013), evidenciamos um estudo bibliográfico, sobretudo em relação ao contexto histórico da trigonometria e suas aplicações. Nesses trabalhos, os autores procuram identificar como surgiu a trigonometria nas diferentes civilizações e quais as relações estabelecidas entre elas. Em comum, destacamos o uso auxiliar da História da Matemática para atingirem seus objetivos. Ademais, utilizaram atividades práticas e também recursos multimídia (*software* e projetor multimídia) durante suas intervenções, tanto no Ensino Fundamental quanto no Médio.

Dando continuidade aos encaminhamentos observados nos trabalhos explicitados no Quadro 6, concentramos a nossa compreensão nas aproximações e inter-relações emergentes das pesquisas, a fim de agrupá-los de maneira a apresentarmos um retrato sintético do porquê da importância deles para esta pesquisa. Nesse sentido, destacamos alguns aspectos relacionados entre eles, sobretudo em razão dos descritores utilizados, assim como os contextos nos quais foram realizadas as pesquisas.

Dos 16 trabalhos elencados, 9 (REIS, 2016; MASCARIN, 2017; PEREIRA, 2011; OCANHA, 2016; FERNANDES, 2010; RIBEIRO, 2015; BORSSOI, 2013 e BULEGON, 2011) estão relacionados com a teoria da aprendizagem significativa. Dado o arcabouço dos estudos, podemos destacar que os objetivos de Reis (2016), Mascarin (2017), Pereira (2011) e Fernandes (2010) explicitam, de maneira clara, o desenvolvimento e a aplicação de *sequências didáticas* por meio de Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS), *Engenharia Didática* ou simplesmente sequência organizada de conteúdo, que fossem adequadas às demandas educacionais. A intencionalidade dos autores foi que essas pudessem incorrer em aprendizagem significativa do tema *trigonometria no triângulo retângulo*. Ambas as sequências mencionadas foram validadas em contexto de sala de aula da Educação Básica, nos níveis de Ensino Fundamental e Médio. No percurso, Ocanha (2016) buscou organizar a proposta curricular da escola enfatizando a presença de tecnologias informáticas em atividades introdutórias do campo da trigonometria.

Acerca dos trabalhos mencionados, destacamos em Ocanha (2016) e Fernandes (2010), maior singularidade ao trabalho que estamos nos propondo a desenvolver. Tais pesquisas abordam o tema Trigonometria a partir do uso de tecnologias diferenciadas (*GeoGebra*, Geoplano, computador, lápis, transferidor, régua, papel), porém, com utilização em momentos pontuais e separadamente. Diferentemente do tratamento dado às tecnologias nas pesquisas mencionadas, em nosso trabalho, apresentamos uma proposta em que usamos uma miscelânea de ferramentas que se interconectam e se retroalimentam em uma *sequência didática* que tenciona obter resultados de indícios eficazes em torno da aprendizagem significativa da *trigonometria no triângulo retângulo*. Ainda em nosso campo de investigação, procuramos evidenciar aspectos dos ambientes de ensino que utilizam tais abordagens para motivarem os alunos na busca pela construção de seus conhecimentos. Tais aspectos diferenciam nossa pesquisa das demais já citadas.

Em conformidade com a teoria, Ribeiro (2015) e Borssoi (2013) optaram por trabalhar com UEPS, priorizando o desenvolvimento de atividades apoiadas por recursos computacionais. Ainda, com base nos autores, salientamos que, no conjunto das obras (RIBEIRO, 2015 e BORSSOI, 2013), a diferença está nos níveis de ensino (Médio e Superior) e nos assuntos abordados (Razões Trigonométricas e Cálculo numérico). Destacamos ainda que, em Borssoi (2013), encontramos focos diferenciados em se tratando de teoria da aprendizagem significativa, pois a autora trabalha com duas linhas/autores (Ausubel e Jonassen). No entanto, no contexto da abordagem, as visões de aprendizagem sem e com tecnologia desses autores se integralizam. Em Bulegon (2013), identificamos uma variedade de estratégias na abordagem de conteúdos de Física no Ensino Médio.

Identificamos, durante a leitura e o mapeamento dos 14 trabalhos (SANTOS, 2016; REIS, 2016; SANTOS, 2017; MASCARIN, 2017; PEGO, 2013; LEITE, 2013; SILVA, 2014; PEREIRA, 2011; OLIVEIRA, 2013; OCANHA, 2016; FERNANDES, 2010; SILVA, 2015; BORTOLI, 2012 e RIBEIRO, 2015) que aludem à trigonometria, as dificuldades existentes no ensino e na aprendizagem desta temática, nos mais diversos contextos, conforme já referido anteriormente. A falta de significado que a maioria dos professores outorgam a esse estudo, corroborado pela falta de contextualização, historicidade, conexão com a realidade do aluno e a pouca proposição de abordagens diferenciadas em sala de aula, são alguns dos fatores motivacionais para realização das pesquisas analisadas. O contexto observado nas pesquisas destacadas também faz parte das percepções deste pesquisador enquanto educador.

Nessa ação de autenticação das contribuições das pesquisas mencionadas para o estudo a que nos propusemos, salientamos o levantamento das bases epistemológicas que sustentam tais pesquisas, desenvolvidas com base na aprendizagem significativa. São elas que formam a modelagem teórica que nos auxilia. Estudando os trabalhos já desenvolvidos e acompanhando o desenvolvimento de novas pesquisas, constatamos o diálogo dos pesquisadores com os teóricos Ausubel, Novak, Gowin, Moreira, Masini, Hanesian, Jonassen, Howland e Marra. São eles os teóricos que formam o principal aporte teórico-epistemológico das pesquisas sobre aprendizagem significativa; logo, não poderia ser diferente em nossa pesquisa.

O conjunto desse aporte teórico e a interpretação do contexto de engajamento colocam-nos na condição de interlocutor e participante da comunidade de pesquisadores – Matemática e Ensino – que discutem a temática. Essa identificação e proximidade com os trabalhos desse grupo e a adoção dos princípios teóricos cognitivistas e sócioconstrutivistas corroboram a nossa autenticidade interna como pesquisador implicado no contexto no qual estamos inseridos.

Os trabalhos apresentados constituem uma fonte comprobatória importante em defesa da utilização de recursos de ensino diversificados, corroborando de maneira eficaz o processo de aprendizagem significativa. Dessa forma, o conjunto de pesquisas se aproxima da ideia geradora do nosso processo investigativo, uma vez que defendemos que sejam apresentados aos alunos os mais distintos meios, para que eles escolham o melhor caminho a seguir. Nesse sentido, salientamos que, apesar de todos os trabalhos terem foco na aprendizagem, a partir da utilização de recursos variados de ensino, a maioria deles esteve centrado em apenas um ou dois recursos, o que destoa do nosso trabalho, no qual usamos, conforme já descrito, uma miscelânea de recursos, em busca de meios para que os alunos aprendessem o conteúdo significativamente.

Dando continuidade ao estado da arte, apresentamos o Quadro 6, onde damos visibilidade a algumas pesquisas internacionais aportadas na teoria da aprendizagem significativa. No entanto, para chegar a esses resultados, tivemos que sair da linha de pesquisa inicial, centrada na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD). Com a intenção de abarcar o contexto internacional, realizamos, no *Google* Acadêmico, buscas por artigos que tivessem envolvimento com a teoria da aprendizagem significativa (TAS) e com a temática *razões trigonométricas no triângulo retângulo*. Para essa busca, não foi estipulado o período de publicações, apenas a relação com os descritores que apresentamos a seguir: *Meaningful Learning; Elementary School; Technology Integration; Trigonometry*.

Em face do exposto, selecionamos, inicialmente, 25 artigos que, após a leitura dos seus resumos e encaminhamentos de pesquisa, resultou na seleção de 7 estudos, que foram identificados por $A_{n,}$ sendo n = 1, 2, 3, ...7.

Quadro 6 – Artigos internacionais analisados.

Item	Autor	Título	Instituição/ UF/ Repositório	Ano de Publicação
A1	SPENCE, L.	Creating Sinificant Learning Experiences – the key to quality in educational programs	http://media.wiley.com/product_data/excerpt/51/07879605/0787960551.pdf	2001
A2	NOVAK, J. D.	Meaningful Learning: The Essential Factor for Conceptual Change in Limited or Inappropriate Propositional Hierarchies Leading to Empowerment of Learners	http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.505.2763&rep=rep1&type=pdf	2002
A3	NOVAK, J. D.	Learning, Creating, and Using Knowledge: Concept maps as facilitative tools in schools and corporations	file:///C:/Users/Romildo/Downloads/article_43512.pdf	2010
A4	OMOROGIUWA, K. O.	Facilitating Self-Regulated Learning Through Effective Feedback	https://www.researchgate.net/publication/275961657_Technology_Integration_for_Meaningful_Learning-the_Constructivist_View	2012
A5	VALLORI, A. B.	Meaningful Learning in Practice	http://jehdnet.com/journals/jehd/Vol_3_No_4_December_2014/18.pdf	2014
A6	UTEMOV. V. V.; KHUSAINOVA, R. M.; SERGEEVA, M. G.; SHESTAK, V. A.	Full Packaged Learning Solutions for Studying Mathematics at School	https://doi.org/10.29333/ejmste/95122	2018
A7	SAMPAIO, H. R. F.; BATISTA I. L.	Mathematics History and Cognitive Values on a Didactic Sequence: Teaching Trigonometry	http://redimat.hipatiapress.com	2018

Elaborado pelo autor, 2019.

A escolha dos artigos supracitados considerou substancialmente a relevância dos contextos educacionais em que foram realizadas as pesquisas. Considerando a quantidade de publicações encontradas, supomos que a teoria da aprendizagem significativa encontra-se mais fortemente aceita e estudada em países como: USA, Rússia, Israel e em alguns outros países do continente asiático, como China, Japão e Coreia do Sul. Os contextos apresentados e abordados por pesquisadores destes países evidenciam uma constante preocupação com a falta de concentração dos alunos em certas atividades, a falta de interesse expresso, a distração e a hiperatividade desses alunos nas aulas de Matemática. Com base nessa percepção inicial, destacamos que os fenômenos observados por estes pesquisadores não são condições locais, mas, sim, uma ocorrência global. Nesse sentido, os estudos demonstram a importância do tema não só para o contexto da Matemática, mas para a construção e percepção da relação do conhecimento humano com as questões presentes no seu dia a dia.

A partir da relação de artigos publicados que apresentam o mesmo foco desta pesquisa, podemos não só estabelecer pontos de convergência existentes entre eles, como também, conhecer a teoria da aprendizagem e o referencial de suporte de cada trabalho. Para estabelecer as inter-relações de informações relacionadas nos textos, atentamos para o objetivo, a questão norteadora (quando apresentada), a teoria de aprendizagem que suportou cada pesquisa, assim como as tecnologias de ensino suscitadas nas abordagens. Para ilustrar esse cenário e potencializar a compreensão acerca dos critérios adotados e/ou implícitos, para nos situarmos entre os caminhos percorridos em cada um dos trabalhos, destacamos uma síntese dos parâmetros mencionados no Quadro 7, que dispomos a seguir.

Quadro 7 – Síntese dos artigos

Item	Objetivo	Questão norteadora	Teoria de Aprendizagem	Principais aportes teóricos	Metodologia	Resultados
A1	Descrever a incomum e emocionante situação do paradoxo de como ensinar no ensino superior na atualidade.	Devemos nos esforçar para mudar nossas práticas tradicionais ou não? Quais são os fatores que afetam nossa resposta?	Teoria de Aprendizagem Significativa – Dolence e Norris.	Heller (1989); Amiran (1989); Blackburn (1980); Saunders (1980); Schmidt (2000); Dolence e Norris (1995).	Não definida.	Os resultados evidenciam que os professores universitários precisam aprender a projetar cursos mais eficazmente para o ensino superior para melhorar significativamente a qualidade de seus programas educacionais. E que o design do curso, é o lugar certo para integrar várias novas ideias e, ao mesmo tempo, constitui o único espaço significativo de mudança que a maioria dos professores pode fazer para melhorar a qualidade do seu ensino e de aprendizagem de estudantes.
A2	Construir e reconstruir significados dos aprendizes que buscam ativamente integrar novos conhecimentos com conhecimento já ancorados em sua estrutura cognitiva por meio de mapa conceitual.	Não definida	Teoria de Aprendizagem Significativa – David Ausubel.	Grune e Stratton (1963); Rinehart e Winston (1968); Dordrecht: Kluwer (2000); Gowin (1981).	A pesquisa utilizou o modelo frameworks de mapa conceitual. Como instrumento de coleta para análise, o autor utilizou mapas conceituais.	A aprendizagem em grupo colaborativo facilita a aprendizagem significativa e a construção de novos conhecimentos. Novas ferramentas de computador estão disponíveis para facilitar as atividades de aprendizagem em geral. Ademais, o software IHMC disponível para alunos e professores em grandes áreas geográficas, criando a possibilidade de partilha de

						conhecimentos por estudantes e professores em qualquer disciplina, tanto em salas de aula individuais e sobre grandes áreas geográficas.
A3	Discutir como se aprende, cria e se usa os conhecimentos por meio de mapas conceituais como ferramentas facilitadoras em escolas e corporações.	Não definida	Teoria de Aprendizagem Significativa – David Ausubel.	Novak, (1987, 1993, 1998; 2003; 2010); Novak e Cañas (2004); Novak e Musonda (1991); Novak e Gowin (1984); Ausubel (1963, 2000).	Não definida.	Os resultados apontam que o www oferece recursos que fornecem uma nova maneira de organizar e fornecer aprendizado experiências que permitam a utilização coordenada e integrada de todas as abordagens. Outro resultado baseia-se nas capacidades do CmapTools para criar mapas de conceito que podem servir como uma "espinha dorsal" para o aluno emergentes modelo de conhecimento para um determinado domínio de estudo.
A4	Apresentar um posicionamento sobre o fenômeno da aprendizagem autorregulada.	Como a aprendizagem autorregulada pode ser facilitada através de feedback eficaz?	Teoria de aprendizagem autorregulada.	Butler e Winne (1995); Sadler (1998); Pintrich e Zusho (2002); Zimmerman e Schunk (2001); Boud (2000); González, F. M. (1993, 2000, 2001, 2008, 2012, 2014).	Não definida.	Ao desenvolver as competências e os hábitos a serem aprendizes efetivos, a autorregulação o aluno exibe estratégias de aprendizado efetivas, esforço e persistência. Os aprendizes efetivos são autorregulantes definindo metas alcançáveis; e selecionando, adaptando ou inventando estratégias para atingir os objetivos declarados.
A5	Expor as vantagens de mapeamento	Qual o papel dos mapas conceituais e	Teoria de Aprendizagem	Ausubel e Novak (1983); Ballester	Não definida.	São ferramentas que ajudam a representar visualmente uma

	conceitual e aprendizagem significativa em sala de aula.	trabalhos colaborativos para a aprendizagem significativa?	Significativa – David Ausubel.	(2011); Novak e Gowin (1988); Ballester (1999, 2008, 2011); Cañas (1995, 1998, 1999, 2000, 2014); González, F. M. (1993, 2000, 2001, 2008, 2012, 2014).		ideia, uma informação, como é o caso dos fluxogramas, cronogramas e infográficos. Uma das vantagens dos mapas conceituais é poder articular conhecimentos em rede, aproximando conceitos que, em um texto corrido, por exemplo, ficariam distantes. Os alunos reconhecessem os erros, tornando possível ao professor avaliar o domínio dos conteúdos pelos estudantes.
A6	Justificar soluções de aprendizagem completas como um meio eficaz de reduzir o tempo gasto na organização de atividades educacionais de crianças em idade escolar.	Não definida.	Não definida.	Feldshtein, (2010); Shaidullina et al (2015); Bordovsky (2012); Akpinar (2012); Vinogradova e Galimova (2017).	Não definida.	Os principais métodos de pesquisa estão monitorando as atividades organizacionais dos professores durante as aulas de matemática, conversando com os professores, analisando o trabalho metódico e os perfis dos professores, modelagem e processamento estatístico dos resultados da pesquisa. Com a ajuda de um "triângulo de projeto” conecta-se os principais parâmetros para avaliar a eficácia de fornecer suporte metódico para professores de matemática: a quantidade de trabalho, tempo e custos. Com isso, quando se altera o valor de um parâmetro leva a alterações dos valores de outros. O uso do tripé permite equilibrar esses parâmetros e alcançar o resultado educacional

						planejado.
A7	Avaliar a eficácia da abordagem histórico-filosófica no ensino de trigonometria em associação com a detecção de valores cognitivos, como apresentado por Lacey (1998).	Não definida.	Teoria de Aprendizagem Significativa – Marco A. Moreira	Brito e Morey (2001); Sad (2004); Vianna (1995); Mendes (1997); Luccas (2004); Miguel (1993), Nobre e Baroni (1999); Pais (2002); Moreira (2010).	Qualitativa – Engenharia Didática	O processo avaliativo destina-se a observar, refletir e favorecer melhores oportunidades aos alunos na sucessão de etapas que constituem a dinâmica de sua aprendizagem. Motivação e planejamento deveriam ser o ponto de partida do processo de ensino/aprendizagem eficaz. Primeiramente, os professores devem estar motivados para uma boa organização de planejamento do ensino. Se isso ocorre, também os discentes se motivam e se abrem para o aprender.

Elaborado pelo autor, 2019.

Destacamos, mais uma vez, que não há unificação quanto ao nível de ensino em que as pesquisas descritas pelos artigos elencados no Quadro 7 aconteceram, ou seja, as abordagens ocorreram da Educação Básica à Superior. Sendo assim, no decorrer da síntese, há necessidade de mencionar o contexto de cada uma delas e a razão pela qual elas se coadunam. Outra observação que queremos antecipar é que, em todos os textos, os autores chamam atenção para o fator de que a mentalidade das crianças, jovens e adultos, bem como, as orientações acerca de valores mudaram, o que ainda precisa ser melhor compreendido e assimilado pelos educadores. Tais influências fertilizam o imaginário do pesquisador, que tenta apontar e/ou justificar determinadas ações que podem incorrer na melhoria dos processos educacionais de aprendizagem.

Dos sete artigos analisados, identificamos a presença da Teoria de Aprendizagem Significava em seis deles: Spence (2001), Novak (2002), Novak (2010), Vallori (2014), Utemov (2018) e Sampaio (2018). Estes, apesar de apresentarem diferentes focos em suas gêneses, têm como cerne estrutural a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, com exceção de Sampaio (2018), que enfatiza as proposições de Moreira (2010), com base na teoria da aprendizagem significativa crítica. Além dos autores citados, também fazem parte do aporte teórico dos trabalhos, outros autores que discutem a teoria da aprendizagem significativa na atualidade. A fim de explicitar a condução dos trabalhos, destacamos, a seguir, algumas aproximações implícitas nas abordagens descritas em cada um dos artigos mencionados.

Baseado na teoria da aprendizagem significativa, A1 (SPENSE, 2001) apresentou argumentos consistentes no sentido de que a aprendizagem significativa pode ser a chave para a melhoria dos programas educacionais em todos os níveis de ensino. A pesquisa deste autor baseou-se na criação de experiências de aprendizagem significativa com alunos do Ensino Superior. Para tanto, foi feito um convite a 20 professores desse nível de ensino para que mudassem suas práticas. Segundo o autor, o convite os estimulava a correrem o risco de afastar-se dos seus métodos usuais de ensino, proporcionando aos alunos a oportunidade de melhorar e de ampliar a compreensão de determinados conteúdos com experiências que fizessem sentido para eles. Sendo assim, os professores eram desafiados a uma possível abertura para novas práticas tendo em vista o acompanhamento das modificações dos atuais ritmos dos processos de ensino e de aprendizagem.

Há pontos de convergência entre o estudo de A1 (SPENCE, 2001) e o desenvolvido por A6 (UTEMOV et al., 2018), principalmente, no que diz respeito à busca por soluções para estudar Matemática em todos os níveis de ensino. Por meio de cursos de formação de professores, o trabalho de Utemov et al (2018) teve a intenção de motivar os próprios professores de Matemática a definirem os tipos de soluções viáveis para o estudo da disciplina em sala de aula e fora dela. Destacou a importância do uso das tecnologias de ensino para melhorar e otimizar as aulas de Matemática dos professores da Educação Básica na Rússia. Para os pesquisadores que realizaram tal estudo, a velocidade das mudanças modernas no sistema de ensino reflete uma renovação acelerada e inédita de meios, formas e métodos de ensino. Além disso, destacam que a aprendizagem significativa, mesmo que a *priori* pareça não ser a melhor opção para resultados imediatos em provas de exames em nível nacional e internacional, a longo prazo, é a melhor solução para engajar os aluno numa aprendizagem duradoura. Nesse sentido, tanto Spence (2001) quanto Utemov et. al. (2018) buscaram, por meio da formação de professores, elaborar e apontar soluções para ensinar e estudar Matemática, na perspectiva de uma aprendizagem significativa.

A despeito dos temas abordados por A2 (NOVAK, 2002), A3 (NOVAK, 2010) e A5 (VALLORI, 2014), evidenciamos uma releitura do contexto da aprendizagem significativa discutida em trabalhos anteriores, mas enfatizando o uso da ferramenta mapa conceitual. Os estudos evidenciaram que, em alguns casos, a proposição de seu uso pode dar-se de forma inadequada (quando não há clareza em relação ao objetivo da sua construção). Contudo, também relacionam inúmeros argumentos favoráveis ao uso de mapas conceituais, por ser uma ferramenta organizadora e potencializadora da aprendizagem humana. Ademais, esses autores enfatizam que mapas conceituais podem ser utilizados em outros ambientes (empresas, governos, etc), que não estejam, necessariamente, vinculados a escolas. Ainda destacamos que a experiência de Novak (2002) baseou-se no uso do *software Cmaptools* com alunos do Ensino Superior, enquanto a de Vallori (2014) teve como foco, alunos do Ensino Médio utilizando o mesmo *software*. Segundo Vallori, o método colaborativo é eficaz para a obtenção de uma aprendizagem de longo prazo e propõe que, em se tratando de alunos do Ensino Médio, que foi o lócus da pesquisa, esse tipo de recurso (método colaborativo) seja utilizado a cada três meses.

Em relação à abordagem de A4 (OMOROGIUWA, 2012), destacamos que, apesar de não estar diretamente ligado ao tema da pesquisa em andamento, o trabalho apresenta estratégias de ensino que corroboram com a condução das nossas atividades propostas. Durante a pesquisa, Omorogiuwa (2012) buscou facilitar a aprendizagem autorregulada por meio *de feedback* efetivo. Segundo o autor, o uso eficaz da estratégia ajuda a desenvolver habilidades e hábitos que promovem a aprendizagem significativa.

Em Sampaio e Batista (2018), é apresentado um contexto que se aproxima das proposições de *sequência didática* discutidas nesta pesquisa. As autoras trabalharam com 23 alunos do Ensino Médio, utilizando o contexto histórico-filosófico da trigonometria, a partir da metodologia da *Engenharia Didática*. Segundo as autoras, os dados que elas levantaram permitem uma reorganização da sequência proposta em sala, com o objetivo de ressignificar e de reproduzir perspectivas para a prática docente de sala de aula. O artigo faz concatenações históricas acerca da evolução do conceito de trigonometria, bem como, apresenta de maneira organizada os pressupostos para a utilização da *Engenharia Didática*. Por fim, as autoras concluem que a abordagem baseada na perspectiva histórica com a observação de valores cognitivos expressos pela Matemática mostrou ser útil para a aprendizagem da trigonometria e sua incorporação ao conhecimento do aluno.

A fim de agrupar os trabalhos apresentados de maneira sintética e explicitar o porquê da importância deles para esta pesquisa, consideramos conveniente esclarecer a forma como pensamos os seus encadeamentos. Sendo assim, dos sete trabalhos elencados, reiteramos que seis, Spence (2001), Novak (2002), Novak (2010), Vallori (2014), Utemov (2018) e Sampaio (2018), estão relacionados com a teoria da aprendizagem significativa. Dado o arcabouço dos estudos, podemos destacar que os objetivos de Novak (2002), Novak (2010) e Vallori (2014) são, claramente, o desenvolvimento e a aplicação (com alunos e professores) do recurso mapa conceitual como ferramenta promotora de mudança de compreensão de conceitos, sendo trabalhado individualmente ou colaborativamente. Em Sampaio (2018), encontramos indícios do comportamento e da cognitividade dos alunos, quando submetidos a situações-problema com tecnologias diversificadas, um dos elementos norteadores desta investigação. A percepção dos autores corroboraram nossas concepções, uma vez que utilizamos o mapa conceitual como um dos instrumentos de coleta de dados para obter indícios de ampliação de conceitos (*diferenciação progressiva* e reconciliação integradora) por parte dos alunos.

Feita a síntese dos artigos, concluímos que contribuíram para refinar a proposta de atividades do nosso projeto. Além disso, na etapa de aplicação do planejamento, os achados dessas pesquisas foram fundamentais para avaliar e conduzir atividades diversificadas, a fim de que o aluno aproveitasse ao máximo o potencial da *sequência didática* desenvolvida. Ademais, a partir destes estudos, evidenciamos ainda que as atividades precisam despertar o interesse dos alunos, a fim de facilitar-lhes a promoção da aprendizagem significativa.

Reiteramos que uma das preocupações da pesquisa foi a investigação de como ocorreria a evolução conceitual dos alunos acerca da temática, buscando uma progressão no nível de complexidade dos conhecimentos matemáticos relacionados ao tema. Para isso, a revisão de literatura foi imprescindível para a concepção de um plano de aprendizagem guiado antecipadamente, levando-se em conta o desempenho dos alunos antes e durante a aplicação da *sequência didática*. Um fator que distingue a proposta das demais pesquisas mencionadas é a quantidade de recursos de ensino utilizados (*Internet*, uso de aparelhos celulares, computadores, *tablets*, aplicativos *(Bubb.us, WhatsApp), software GeoGebra*, projeção de *slides*, atividades experimentais, leitura de textos, aula expositiva dialogada, aula de campo), bem como o período de tempo demandado para a observação e a execução da intervenção. Porém, o que mais nos diferencia de todas as pesquisas relacionadas é o fato de essa pesquisa discutir processos de *diferenciação progressiva* e a *reconciliação integradora* dos conceitos de *razões trigonométricas no triângulo retângulo*, com alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental da Educação Básica.

Nesse sentido, destacamos que, das pesquisas selecionadas, somente três delas (apenas uma de mestrado acadêmico em Matemática) fazem menção aos processos de *diferenciação progressiva* e à *reconciliação integradora.* Apesar da maioria absoluta dos estudos apresentados estarem relacionados à teoria da aprendizagem significativa, há poucos escritos na área de Matemática que abordem o assunto da diferenciação e da reconciliação de conceitos. Dessa forma, entendemos que podemos contribuir com as demais pesquisas que venham a corroborar essa tese, a fim de ampliar a compreensão de como esses mecanismos estão engajados na estrutura cognitiva dos aprendizes e de como contribuem para a efetivação de uma aprendizagem significativa.

Nesta seção, apresentamos algumas pesquisas correlatas ao tema de pesquisa e da realidade investigada. O intuito não foi apenas apresentar as contribuições que estes trabalhos trouxeram a esta ação investigativa, mas proporcionar a futuros pesquisadores uma fonte de referências confiáveis que discutem a temática, colaborando assim na estruturação de futuras pesquisas nessa seara. No capítulo seguinte, apresentamos a metodologia da investigação, os procedimentos e técnicas para a coleta e a análise dos dados, o planejamento para execução da sequência didática e a caracterização do grupo pesquisado.

METODOLOGIA

O Capítulo apresenta a metodologia de investigação; os procedimentos de coleta de dados; os procedimentos técnicos de análise; o planejamento e a execução da *sequência didática* e, por fim, os sujeitos participantes da pesquisa.

3.1 Metodologia de investigação

Esta pesquisa objetivou **investigar quais características da *sequência didática,* que considera o uso de variados recursos de ensino, pode favorecer a aquisição e a construção de conhecimentos pelos alunos, viabilizando indícios de aprendizagem significativa das *razões trigonométricas no triângulo retângulo*.** Assim, esta pesquisa baseou-se numa *sequência didática* fundamentada nos princípios da *Engenharia Didática*, ancorada nos pressupostos da *Teoria de Aprendizagem Significativa,* aplicada em situação específica de sala de aula.

Nessa seara, tivemos como parceira uma professora de Matemática do 9º Ano do Ensino Fundamental, que nos recebeu, acreditou em nossa proposta e participou ativamente da primeira fase de aplicação da *sequência didática* proposta. Nesse seguimento, a professora participante fez a aplicação da sequência de ensino, enquanto plano piloto. Na segunda fase, ou seja, na validação da *sequência didática,* esta foi aplicada pelo próprio investigador, uma vez que havia um entendimento, que, para alcançar os objetivos traçados seria necessária uma atuação mais direcionada aos princípios da teoria de aprendizagem elencada.

Nesse sentido, a partir do objetivo proposto e tomando a *sequência didática* como uma ação educativa que não pode ser sinônimo de transferência do conhecimento, mas, sim, uma ação ativa e permanente no desenvolvimento dos processos de ensino e de aprendizagem, essa pesquisa enquadra-se numa abordagem do tipo qualitativa, que utiliza elementos da *Engenharia Didática*. Nessa perspectiva, esclarecemos que a adoção dessa metodologia teve por base o fornecimento de uma relação direta entre a teoria e a prática educacional, de forma integrada com a realidade da sala de aula. Dessa forma, tivemos a oportunidade de observar como os acontecimentos são influenciados por variantes como os próprios alunos, suas culturas, suas interações com outros alunos e com o professor, o material educativo e os recursos de ensino utilizados.

Acreditamos que a abordagem qualitativa conseguiu responder às questões particulares da pesquisa, criando um espaço mais efetivo das relações, dos processos e dos fenômenos que não puderam ser reduzidos à operacionalização de variáveis, geralmente utilizadas em pesquisas quantitativas. De acordo com Gil (2010), esse tipo de estudo compreende o sujeito e o objeto de pesquisa de forma contextualizada e inter-relacionada, algo de difícil percepção em dados estatísticos e mensuráveis. Para Triviños (1995, p. 109),

> [...] a pesquisa qualitativa é descritiva, com tendência à análise indutiva onde o significado é a preocupação essencial, ou seja, aprofunda-se na interpretação e significado dos fatos e fenômenos; utiliza o ambiente como fonte natural e o pesquisador é o instrumento chave, preocupando-se com o processo e não apenas com os resultados e o produto.

Gil (2010) corrobora dizendo que a pesquisa qualitativa é exploratória. Para esse autor,

> [...] as pesquisas exploratórias têm como principal finalidade desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e ideias, tendo em vista a formulação de problemas mais precisos ou hipóteses pesquisáveis para estudos posteriores. (GIL, 2010, p. 27).

Em face das concepções de Triviños (1995) e de Gil (2010), podemos dizer que a questão inicial que motivou a busca de sentidos e elucidações tem caráter particular. Nesse sentido, a pesquisa qualitativa nos possibilitou a descrição de eventos que apontassem respostas direcionadas a outras interpretações do problema, dando margem a justificar ou descredenciar as hipóteses substantivas formuladas.

Tomando como base as premissas dos autores, justificamos que, em nosso processo investigativo, nos preocupamos, ainda, com o delineamento das atividades e não apenas com o resultado e o produto. Por tratar-se de uma pesquisa exploratória (que busca definir como é um cenário), não nos limitamos à mera apuração dos dados. Nossa intenção foi concatená-los de tal modo que nos permitisse, ao final da pesquisa, ter uma visão ampla de um cenário inicialmente imerso e assim chegar próximo ao que o aluno (no caso o público pesquisado) pensou e construiu a partir da interação com os conceitos aprendidos e do desenvolvimento das atividades propostas na *sequência didática*.

Na tentativa de mobilizar a aprendizagem significativa das *razões trigonométricas no triângulo retângulo,* no 9º Ano do Ensino Fundamental, procuramos organizar um conjunto de conhecimentos e atividades que viessem facilitar a aprendizagem durante a experiência de ensino em sala de aula. Com base no que está estabelecido na literatura, almejamos, inicialmente, conhecer os sujeitos da pesquisa. Nessa fase, acompanhamos a turma de alunos investigados por uma semana, ou seja, 5 períodos de aula de 50 minutos cada um. Posteriormente, aplicamos um teste de conhecimento inicial para averiguar quais seus conhecimentos prévios, para então propor a intervenção de ensino.

Nesse sentido, ressaltamos que essa pesquisa também é uma experiência de *Engenharia Didática,* por tratar-se de um contexto educacional que pode ser discutido e modificado ativamente pelos seus personagens, porque a *sequência didática* foi construída a partir de situações que estavam relacionadas com os conhecimentos prévios dos alunos sobre o tema e com sucessivas interações e alterações a partir da vivência em sala de aula, o que possibilitou adequar a *sequência didática* para a promoção da aprendizagem significativa.

Nesse sentido, reiteramos a proximidade com critérios da *Metodologia da Engenharia Didática,* discutida por Artigue (1996) e Pais (2011). Em se tratando dessa abordagem, de acordo com Almouloud e Coutinho (2008), a *Engenharia Didática* pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado conceito, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um novo conceito. Segundo os autores (2008, p. 3), “esse tipo de pesquisa difere das que são transversais aos conteúdos, mesmo que seu suporte seja o ensino de certo objeto matemático (um saber ou um saber-fazer)”.

Os pressupostos elencados pelos autores também nos fizeram refletir acerca de uma melhor organização dos procedimentos metodológicos, tanto na dimensão teórica, como, também, na experimental, aliando o plano teórico desenvolvido a partir da aprendizagem significativa à experimentação das atividades da *sequência didática* na prática educativa. No decorrer do processo, a cada passo percorrido, procuramos diversificar os recursos de ensino utilizados, sempre procurando despertar a curiosidade e a motivação dos alunos, dentro e fora da sala de aula.

Para atingir o almejado, apropriamo-nos de recursos como: *internet*, uso de aparelhos celulares, computadores, *tablets*, aplicativos *(Bubbl.us, WhatsApp), software GeoGebra*, projeção de *slides*, atividades experimentais, leitura de textos, aula expositiva dialogada e aula de campo. A utilização de mais de um recurso para trabalhar cada tópico de conteúdo está embasada nas percepções de Jonassen (1996, 2004, 2007 e 2014). Segundo o referido autor, agindo dessa forma, oportunizamos aos alunos, identificarem-se com os encaminhamentos que são mais factíveis aos seus aprendizados, tornando a interação deles com os recursos, mais alinhada ao processo cognitivo.

Nesse sentido, o uso de variados recursos e o equacionamento de como foram utilizados na *sequência didática* tiveram como ancoradouro os pressupostos da *Engenharia Didática*. Tal metodologia preconiza que o pesquisador pode utilizar uma pluralidade de procedimentos, estratégias e técnicas para levantar, coletar e validar os dados, tendo como meta proporcionar os meios necessários para responder com consistência à questão norteadora da pesquisa. Nesse sentido, durante o desenvolvimento das atividades, utilizamos instrumentos que consideramos pertinentes e auxiliares para a decodificação das situações e percepções acerca das características da *sequência didática*.

3.2 Procedimentos e técnicas para a coleta e análise dos dados

Para investigar o desenvolvimento da aprendizagem dos alunos utilizando a *sequência didática* como fonte potencializadora, foi necessário observar parâmetros importantes visando à identificação da evolução cognitiva dos alunos. Para isso, utilizamos para a coleta dos dados numa abordagem qualitativa os seguintes métodos: análise prévia, atividades da *sequência didática* e análise final. No Quadro 8, expomos de maneira sucinta os métodos de coleta dos dados e como foram registrados.

Quadro 8 – Método e forma de coleta dos dados

	Forma de registro dos dados
Análise prévia	• Teste de conhecimento inicial para análise dos conhecimentos prévios dos alunos; • Mapa conceitual para análise dos conhecimentos prévios dos alunos; • Observação participante – ficha avaliativa.
Atividades da *sequência didática*	• Registro das respostas, participação, envolvimento, criatividade, interação dos alunos às atividades contidas na *sequência didática* por meio do diário do professor; • Observação participante – ficha avaliativa.
Análise final	• Teste de conhecimento final para análise da evolução dos conhecimentos dos alunos; • Mapa conceitual para análise da evolução conceitual; • Observação participante – ficha avaliativa; • Entrevista com grupo de alunos.

Fonte: o autor, 2019.

A escolha da observação e da entrevista como instrumentos para a geração dos dados foi motivada pelas proposições de Gil (2010) e de Marconi e Lakatos (2003, p. 190), que as definem como "[...] técnicas de coleta de dados para conseguir informações e utiliza os sentidos na obtenção de determinados aspectos da realidade. Não consiste apenas em ver e ouvir, mas também em examinar fatos ou fenômenos".

Segundo Gil (2010), a técnica de observação pode admitir, em média, três modalidades: espontânea, participante e sistemática. Durante esse processo investigativo, o nosso papel condicionou-se ao de observador participante.

Nesse sentido, salientamos que as observações feitas no *lócus* da pesquisa estão de acordo com a descrição apresentada na ficha de observação (APÊNDICE A). O instrumento auxiliou nos registros de atividades, metodologias utilizadas, estratégias do pesquisador, dificuldades emergentes, comportamento dos alunos diante da atividade proposta, observações resultantes das práticas em sua totalidade. As observações em torno das nossas ações foram registradas durante todo o tempo em que estivemos em campo, compreendendo 22 períodos de aula de 50 minutos cada um.

Já em relação ao teste de conhecimentos (questionário), segundo Richardson (1999), entre as vantagens, verifica-se que esse instrumento produz resultados mais rapidamente; não é influenciado pela presença do pesquisador; oferece a segurança do anonimato; é estável, uniforme e objetivo em termos de quantificação e pode ser adaptado para coletar informação generalizável da maior parte da população humana. Ademais, as perguntas podem ser abertas, fechadas ou mistas. As primeiras concedem ao informante a possibilidade de responder livremente, usando linguagem própria. As segundas são pré-estabelecidas, impossibilitando ao respondente expressar suas ideias e opiniões. Já as terceiras são formuladas com a combinação das outras duas (RICHARDSON, 1999).

Nessa pesquisa, planejamos o uso de dois testes de conhecimentos (APÊNDICES B e C), que foram aplicados no início e no final da ação investigativa. A intenção inicial foi a verificação de possíveis subsunçores (conhecimentos prévios) acerca do assunto discutido e, no final, foi aplicado um novo teste de conhecimentos para observar e constatar se houve incorporação de novos conhecimentos aos já ancorados cognitivamente, ou seja, se houve evolução da apropriação dos conceitos. Os comparativos entre os dois testes que apresentamos na análise dos dados no Capítulo 4 resultam das percepções do investigador acerca do grupo e do desenvolvimento da *sequência didática* proposta pelos alunos.

Em se tratando da eficácia para a obtenção de indícios de aprendizagem significativa, ou da mensuração do quão abrangente são os subsunçores dos alunos relacionados a determinado conteúdo, de acordo com Moreira (2011), os mapas conceituais de Novak são exemplos de ferramentas avaliativas úteis, tanto do ponto de vista substantivo como do programático. Por meio dessa ferramenta, segundo Moreira (exposição oral), é possível identificar a aquisição e a transposição de conceitos estudados para situações práticas do dia a dia.

Assim, fazemos saber que, no decorrer do nosso trabalho, também utilizamos o mapa conceitual como uma fonte geradora de informação acerca da evolução da aprendizagem dos alunos. Na ação investigativa, aplicamos a ferramenta em dois momentos distintos da *sequência didática* (na primeira parte e na terceira parte do processo). Tal qual o teste de conhecimentos, a ferramenta contribuiu de maneira valiosa na identificação de evidências da evolução da aprendizagem dos alunos.

No andarilhar, também utilizamos à entrevista, que foi aplicada como avaliação final com cinco alunos da turma investigada, os quais deram sugestões e contribuições que foram incorporadas aos registros escritos de dados coletados. A escolha do instrumento entrevista foi embasada em Marconi e Lakatos (2010). Segundo Marconi e Lakatos (2010, p. 178), a entrevista "(...) é um procedimento utilizado na investigação social, para a coleta de dados ou para ajudar no diagnóstico ou no tratamento de um problema social".

Em diálogo com as proposições de Moreira (2011[a]), Ausubel (2003) e Novak e Gowin (1984), reiteramos que o uso de um teste de conhecimentos inicial e também de um mapa conceitual no início das atividades objetivou identificar conhecimentos prévios dos alunos, que poderiam gerar um conjunto de situações que servissem de aporte para o desenvolvimento e a organização da *sequência didática* para o tema: *razões trigonométricas no triângulo retângulo*. Essa análise fez-se necessária, pois, a partir dela, pudemos ter clareza acerca de quais *subsunçores* estavam significativamente ancorados na estrutura cognitiva dos alunos e, a partir deles, mediar a aquisição daqueles ainda necessários para atingir o estágio de uma aprendizagem significativa. Conforme Moreira (2011a, p. 26),

> [...] a clareza, a estabilidade e a organização do conhecimento prévio em um dado corpo de conhecimentos, em um certo momento, é o que mais influencia a aquisição significativa de novos conhecimentos nessa área, em um processo interativo no qual o novo ganha significados, se integra e se diferencia em relação ao já existente que, por sua vez, adquire novos significados fica mais estável, mais diferenciado, mais rico, mais capaz de ancorar novos conhecimentos.

Portanto, apresentados os mecanismos, acreditamos que a análise prévia utilizando teste de conhecimentos (questionário) e a elaboração de mapa conceitual, bem como os registros da ficha avaliativa ensejaram material abundante e eficaz para a construção e a análise do conhecimento prévio dos alunos. De forma idêntica procedemos com a aplicação dos mesmos instrumentos na fase final da pesquisa.

O teste de conhecimentos final foi composto por questões de nível de conhecimento mobilizável e disponível, tratando dos mesmos temas presentes no teste de conhecimentos inicial aplicado para análise prévia ou para análise a *priori,* como preconiza a primeira fase da *Engenharia Didática*. Apesar de a composição das questões do teste de conhecimentos final refletir sobre a mesma temática, o instrumento final compunha em seu arcabouço, situações mais complexas, visando investigar a eficiência da *sequência didática* nos processos de ensino e de aprendizagem.

Na sequência, para a apreciação qualitativa do mapa conceitual final, visando identificar os conceitos e relações hierárquicas desenvolvidas nas estruturas cognitivas dos alunos, aproximamo-nos dos esquemas de pontuação de Novak e Gowin (1984). Tais procedimentos consistem nomeadamente, conforme a teoria cognitiva da aprendizagem de Ausubel, em três das suas ideias que são: organização hierárquica, *diferenciação progressiva* e *reconciliação integradora.*

Quanto aos registros diários, cabe salientar que, na análise final ou na análise a *posteriori,* como preconiza a terceira fase da *Engenharia Didática* que norteou a organização da *sequência didática*, as fichas avaliativas que nos acompanharam durante a investigação também tiveram a finalidade de identificar a evolução conceitual dos alunos. Ademais, no instrumento, também registramos se a *sequência didática* proposta foi potencialmente significativa, além de destacar os pontos positivos e negativos da utilização dela.

Para concatenar os dados que emergiram da aplicação dos instrumentos citados, buscando identificar vestígios de uma aprendizagem potencialmente significativa, alcançada a partir da aplicação da *sequência didática*, fez-se necessário que nos apropriássemos de um procedimento de pesquisa que se situa na teoria da comunicação. Nesse sentido, aproximamo-nos da *Análise Textual Discursiva,* discutida por Moraes e Galiazzi (2016).

Essa escolha levou em consideração a liberdade do investigador de transitar pelos extremos dessa análise, ora analisando o conteúdo, ora analisando o discurso dos seus interagentes. A sua utilização objetivou identificar, a partir das respostas dos testes de conhecimentos, a apresentação dos mapas conceituais e anotações do observador participante, informações que oportunizassem a identificação dos conhecimentos prévios dos alunos, bem como, indícios de *diferenciação progressiva* e *reconciliação integradora* dos conceitos e proposições relacionados ao tema.

Reportando-nos a essa questão, vale reiterar que Moraes e Galiazzi (2016) apresentam a *Análise Textual Discursiva* como uma metodologia que se insere entre os extremos da análise de conteúdo tradicional e a análise de discurso que representa um movimento interpretativo de caráter hermenêutico. Para os autores (2016, p. 21),

> a análise textual discursiva parte de um conjunto de pressupostos em relação à leitura dos textos que examinamos. Os materiais analisados constituem um conjunto de significantes. O pesquisador atribui a eles significados a partir de seus conhecimentos, intenções e teorias. A emergência e comunicação desses novos sentidos e significados são os objetos da análise.

Dessa forma, entendemos que a *Análise Textual Discursiva* nos possibilitou fazer deduções de qualquer uma das concepções conceituais que os alunos apresentaram, uma vez que toda mensagem escrita está repleta de informações sobre a evolução conceitual do tema e as concepções dos aprendizes. Segundo Moraes e Galiazzi (2016, p. 33),

> a análise textual discursiva, inserida no movimento da pesquisa qualitativa não pretende testar hipóteses para comprová-las ou refutá-las ao final da pesquisa; a intenção é a compreensão, a reconstrução de conhecimentos existentes sobre os temas investigados.

Ancorados na reflexão dos referidos autores, partimos do pressuposto de que toda a leitura já é uma interpretação e que não existe uma leitura única e objetiva, ou seja, a leitura é uma construção de múltiplos significados. Nesse viés, fizemos uma análise dos indícios obtidos em cada uma das Partes (I, II, III) da *sequência didática* desenvolvida, sem desmerecer as demais atividades inseridas pelo professor no contexto da disciplina, sempre procurando dar alguns sentidos e significados ao observado, de forma a encaminhar descrições e interpretações capazes de apresentarem novos modos de compreender o fenômeno investigado.

A unitarização, primeira etapa da *Análise Textual Discursiva*, nesse trabalho, caracterizou-se por uma leitura cuidadosa e aprofundada dos dados, num movimento de separação das unidades significativas. Segundo Moraes e Galiazzi (2016, p. 137), "o pesquisador, no processo da unitarização, precisa estar constantemente atento à validade das unidades que produz. Os objetivos da investigação, o problema e as questões de pesquisa ajudam a construir essa validade". Nesse processo, foram válidas para a pesquisa somente aquelas unidades que afirmam algo em relação ao objeto de investigação.

A análise dos dados coletados a partir da aplicação da *sequência didática* em sala de aula, ocorreu a partir dos documentos construídos pelos alunos, especialmente para essa pesquisa; por meio das respostas dos testes de conhecimentos; das atividades e exercícios propostos; dos depoimentos produzidos; da construção de mapas conceituais (os excertos analisados foram tomados por sorteio dos mapas construídos por 5 alunos na fase inicial, e foram replicados como instrumentos comparativos na aplicação final da ferramenta) e da observação participativa. Nesse sentido, a análise foi realizada a partir das concepções de Moraes e Galiazzi (2016):

1. Desmontagem dos textos: os textos foram fragmentados individualmente, através de um processo denominado de desconstrução e de unitarização desses textos, para buscar o melhor foco das questões mais individuais da *sequência didática*. A desmontagem do texto foi realizada da seguinte forma:

a) Fragmentação das Partes[13] (I, II, III) por etapas (a Parte I está subdividida em 3 etapas; a Parte II está subdividida em 2 etapas; a Parte III está

[13] A *sequência didática* está dividida em partes (I, II, III), que estão subdivididas em etapas (1, 2, 3, ...9).

subdividida em 4 etapas) de aplicação da *sequência didática* em sala de aula que apresentamos a seguir:

Parte I

- *Primeira etapa:* aplicação do teste de conhecimento inicial; construção do mapa conceitual inicial; leitura compartilhada do texto, *"Voltando ao passado para compreender o presente da trigonometria"* (ANEXO A); roda de conversa com a apresentação do quadro evolutivo dos conceitos relacionados à trigonometria e ao triângulo retângulo. O cumprimento da etapa demandou 3 aulas de 50 minutos cada uma.

- *Segunda etapa:* paralelismo; teorema de Tales; proposição e resolução de atividades da *sequência didática*. Foram necessárias 2 aulas de 50 minutos cada uma.

- *Terceira etapa:* semelhança de triângulos. Para desenvolver a proposta da *sequência didática,* utilizamos 3 aulas de 50 minutos cada uma. Em síntese, para aplicar a Parte I da *sequência didática,* foram necessários 8 períodos de aula.

Parte II

- *Quarta etapa:* construção das *razões trigonométricas no triângulo retângulo* por meio de semelhança e proporcionalidade; leitura e discussão acerca do texto *Astrolábio* (ANEXO B). Nesta etapa, demandamos 3 aulas de 50 minutos cada uma.

- *Quinta etapa:* construção do *Astrolábio* (ANEXO C); utilização do *Astrolábio* em campo; proposição, construção e resolução de atividades relacionadas aos dados coletados em campo pelos próprios alunos. Para concluir essa etapa, demandamos 4 períodos de aula de 50 minutos cada um. Em resumo, para o desenvolvimento da Parte II da *sequência didática,* foram necessários 7 períodos de aula de 50 minutos cada um.

Parte III

- *Sexta etapa:* construção do triângulo retângulo no *GeoGebra*; discussão das questões propostas durante os processos de construção e de visualização do triângulo retângulo na interface do *software*. Essa etapa foi concluída com a utilização de 3 aulas de 50 minutos cada uma.

- *Sétima etapa:* cálculo de inclinação de ruas no *GeoGebra*; discussão acerca do encadeamento de conceitos implícitos no momento da Modelagem Matemática. A etapa demandou 2 aulas de 50 minutos cada uma.

- *Oitava etapa:* aplicação do teste de conhecimentos final; considerações acerca da pesquisa. Durou 1 período de aula de 50 minutos.

- *Nona etapa:* construção do mapa conceitual final; agradecimentos. Demandou 1 período de aula de 50 minutos. No total, na Parte III da *sequência didática,* utilizamos 7 períodos de aula de 50 minutos cada um. Para cumprir o desenvolvimento de toda a *sequência didática,* foram necessários 22 períodos de aula de 50 minutos cada um.

b) Reproduzimos cada unidade do encontro de modo que a análise dos dados tornasse o fenômeno investigado, o mais significativo e fiel ao que os alunos discutiram, construíram e executaram, facilitando a própria categorização.

2. Estabelecimento de relações: processo de categorização, no qual buscamos reunir elementos próximos à teoria para a compreensão do fenômeno investigado, um processo de auto-organização e de reunião de elementos que se assemelhavam.

A categorização, segundo Moraes (2003, p. 193), reflete um “processo de comparação constante entre as unidades definidas no processo inicial de análise, levando ao agrupamento de elementos semelhantes”. Conforme Moraes e Galiazzi (2013, p. 88),

> a categorização é o momento de síntese e organização de um conjunto de informações relativas aos fenômenos investigados. Essas sínteses são as teorizações do pesquisador, produzidas a partir de perspectivas teóricas implícitas dos sujeitos da pesquisa e do próprio pesquisador, sempre em interlocução com outros teóricos. Requerem contínuo aperfeiçoamento, adequação e refinamento no decorrer do processo de análise e produção escrita. O processo da categorização constitui estratégia de movimento da pesquisa que vai do empírico ao abstrato, dos dados coletados para as teorias construídas ou reconstruídas pelo pesquisador.

De acordo com Moraes e Galiazzi (2016), na construção de sistemas de categorias podem ser destacados dois processos, que indicam movimentos em direções opostas. Numa das direções, trabalha-se com categorias a *priori*; na outra, opera-se com categorias emergentes.

Nessa pesquisa, as três categorias elencadas não foram definidas a *priori;* foram escolhidas a partir da análise dos dados coletados, de tal forma que se classificou o que foi investigado, escolhendo as categorias pertinentes à questão investigativa, aos objetivos e ao referencial teórico do trabalho. Na aproximação entre a metodologia da *Engenharia Didática*, utilizada na constituição e na aplicação da *sequência didática* e a metodologia da Análise *Textual Discursiva,* buscamos correlações entre as etapas da *Engenharia Didática* preconizada por Artigue (1996) e Pais (2011), e a *categorização* do processo de análise textual, segundo Moraes e Galiazzi (2016).

Nesse sentido, esclarecemos que a análise da primeira Categoria da *Análise Textual Discursiva* se coaduna com a primeira fase da *Engenharia Didática*, ou seja, com as análises prévias, ou a *priori*. A segunda Categoria emergente do processo se harmoniza com a segunda fase preconizada pela Engenharia de Artigue e Pais, ou seja, corresponde à fase da *experimentação*. A terceira Categoria emergente acorda com a terceira fase da *Engenharia Didática*, ou seja, congraça com a análise a *posteriori*. Feita a observação, destacamos as seguintes categorias emergentes para análise:

- *Categoria 1: conhecimentos prévios emergentes;*
- *Categoria 2: uso de recursos de ensino variados;*
- *Categoria 3: a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora.*

De acordo com Ribeiro (2015), o conteúdo que emerge do discurso é comparado com algum tipo de teoria. Inferimos, pois, das diferentes "falas", diferentes concepções de mundo, de sociedade, de escola e de indivíduo. Para Moraes e Galiazzi (2016, p. 139),

> quando a opção é por categorias emergentes, o pesquisador assume uma atitude fenomenológica de deixar que os fenômenos se manifestem,

> construindo suas categorias a partir das múltiplas vozes emergentes nos textos que analisa.

Dessa forma, tomando como base os pressupostos de Moraes e Galiazzi (2013, 2016), inferimos que, ao escolher a *Análise Textual Discursiva*, optamos por uma metodologia que consideramos ser fundamental para a compreensão dos múltiplos fenômenos em sala de aula. Nesse sentido, tomamos como ponto de partida: a mobilização de subsunçores prévios, o envolvimento e o desenvolvimento das atividades propostas na *sequência didática*, o ambiente educacional e as evoluções conceituais do tema pelos alunos, num movimento de aquisição e retenção de conhecimentos que supomos que os tenham conduzido a uma aprendizagem significativa.

Parafraseando Moraes e Galiazzi (2016), supomos que os dados emergentes da coleta de dados configuraram a formação de uma tempestade, uma vez que o nosso trabalho como pesquisador pôde produzir, por meio da unitarização, as condições necessárias para um processo auto-organizado de construção de novos significados em relação ao fenômeno estudado e, pela categorização, apresentar os resultados alcançados. Nesse sentido, reiteramos que a *Análise Textual Discursiva* foi adequada à investigação dos resultados da pesquisa, por ser dinâmica e fornecer a liberdade esperada para o pesquisador criar e expressar-se acerca dos dados coletados. Com relação aos instrumentos de coleta de dados, salientamos que cada um deles teve sua devida importância no contexto da responder ao questionamento:

Quais características da *sequência didática* facilitam os processos de *diferenciação progressiva* e *reconciliação integradora* dos conceitos das *razões trigonométricas no triângulo retângulo*?

Feita a explicitação dos processos metodológicos elencados para esta pesquisa, apresentamos, na seção seguinte, o planejamento da *Engenharia Didática* executada por meio de uma *sequência didática* pensada para esta investigação.

3.3 Planejamento da execução da *sequência didática*

Nessa seção, apresentamos um resumo das fases da metodologia para o planejamento, elaboração e execução da *sequência didática*.

De acordo com Artigue (1996), é necessário que o interventor[14] siga alguns encaminhamentos que corroboram para a estruturação e maior clareza do que pode ser trabalhado em cada uma das fases preconizadas pela metodologia da *Engenharia Didática*. Na primeira fase, as *análises preliminares* têm como propósito analisar o funcionamento do ensino através da forma como vem sendo utilizado o conteúdo em questão, as *razões trigonométricas no triângulo retângulo*, para propor uma intervenção que ajude a modificar a sala de aula usual.

Esta análise assegura esclarecer os efeitos desse ensino, as concepções dos alunos e as dificuldades e obstáculos que marcam a evolução das concepções. A reflexão sobre as lacunas no ensino é o ponto de partida para determinar condições possíveis de um ponto de funcionamento mais satisfatório, baseado na *teoria da aprendizagem significativa,* numa tentativa de alterar a realidade encontrada.

Ainda, nessa primeira fase, Artigue (1996) recomenda que seja feita a distinção de três dimensões para o seu desenvolvimento:

1) A dimensão epistemológica, que, nessa pesquisa, está fundamentada na característica do saber em jogo, cuja análise foi abordada num delineamento comparativo do surgimento e da evolução do conceito de triângulo retângulo e de um quadro da evolução histórica do uso das razões trigonométricas. Essa dimensão já foi evidenciada na seção 2.2, ao tratarmos de alguns aspectos relevantes acerca da temática.

2) A dimensão cognitiva está associada às características do público ao qual se dirige o ensino, ou seja, é o momento de criar uma ligação (ambientação) com os alunos da escola participante da pesquisa, antes de iniciar a ação. Nesta pesquisa, foi um momento rico de interação, em que o pesquisador buscou, por meio da observação participante, averiguar, atualizar e formalizar dados sobre suas concepções a respeito do tema em questão.

---

[14] Nessa tese, a palavra interventor está convencionada à própria pessoa do pesquisador.

Assim, no primeiro contato com o grupo pesquisado, enfatizamos que a proposta de ensino que trabalharíamos, na verdade, tratava de uma experiência didática. No entanto, esperávamos que eles pudessem agir de maneira natural (mantendo seus padrões de atitude e comportamento) durante a intervenção; caso contrário, os resultados emergentes da aplicação da *sequência didática* passariam a ser artificiais.

Ao iniciar a pesquisa, explicitamos aos alunos que as aulas seriam registradas por meio de ficha avaliativa e, às vezes, fotografadas. O intuito dessa ação foi identificar dados considerados relevantes para o pesquisador, possibilitando-lhe a análise das condições *a priori*. Na sequência, solicitamos a assinatura dos termos de consentimento pelo professor e pelos alunos pesquisados, dispostos nos Apêndices D e E.

Em seguida, aplicamos o teste de conhecimentos inicial (APÊNDICE B), com o intuito de levantar os conhecimentos prévios dos alunos. O teste de conhecimentos, como já foi preconizado, está relacionado com: *retas paralelas e perpendiculares, ângulo, conceituação e caracterização do triângulo retângulo, relações métricas no triângulo retângulo, semelhança entre triângulos retângulos, teorema de Pitágoras e rações trigonométricas no triângulo retângulo, além da identificação* dos *tipos de triângulos* mais recorrentes: escaleno, retângulo e isósceles. Exemplos de questões estão dispostas no teste de conhecimentos inicial (APÊNDICE B).

Essa fase de sondagem diagnóstica nos possibilitou envolver os alunos numa atmosfera de ensino, que lhes possibilitou resgatar de suas estruturas cognitivas, os conhecimentos ancorados (aqueles que eles tinham) anteriormente, acerca das noções básicas de *trigonometria no triângulo retângulo*.

O formato das questões envolvendo textos e imagens, assim como os diferentes níveis dos questionamentos, procurando mobilizar distintos graus de conhecimento matemático ajudaram o pesquisador a ter clareza quanto aos conhecimentos gerais de seus pesquisados. A maneira como as atividades da *sequência didática* se apresenta objetivou utilizar componentes da *Teoria da Aprendizagem Significativa,* para identificar e verificar a forma como são mobilizados os processos de *diferenciação progressiva* e de *reconciliação integradora* dos conceitos relacionados a *razões trigonométricas no triângulo retângulo*.

Ensejando ampliar nossa percepção inicial acerca do grupo pesquisado, solicitamos a construção de um mapa conceitual, com tema centralizado nas *razões trigonométricas no triângulo retângulo.* Por meio do instrumento aplicado, pudemos fazer observações para além de seus conhecimentos prévios, pois o mapa nos oportunizou identificar como os conceitos relacionados ao tema estavam organizados na estrutura cognitiva dos aprendizes, isto é, em casos de já haver organização. Nesta etapa, ainda dedicamos tempo de observação para a análise do comportamento dos alunos frente à aplicação dos instrumento de coleta de dados.

3) dimensão didática – associada às características do funcionamento do sistema de ensino, ou seja, como vêm sendo desenvolvidas as abordagens dos conteúdos em sala de aula. Nessa pesquisa, o desenvolvimento dessa etapa ocorreu por meio da investigação de como os conteúdos eram apresentados pela professora da disciplina de Matemática à turma. Nossa intenção foi nos inteirar da forma usual do sistema de ensino adotado naquela turma para que nossa intervenção fosse a mais distinta possível.

No decorrer das análises, observamos que o recurso comumente adotado pela titular da disciplina estava centrado na utilização do livro didático adotado pela escola e, esporadicamente, utilizava listas de exercícios elaboradas como tarefa extraclasse. A maneira avaliativa das atividades consistia em chamar alguns alunos no quadro branco para exporem suas resoluções, mas sem nenhuma argumentação por parte do aluno. Quanto ao produto final dessas apresentações, sempre questionava à turma se a resolução estava correta ou se precisava de ajuste, sem atribuir outras contribuições para a desenvoltura da aula.

Reportando à maneira como as aulas de Matemática eram ministradas naquela turma, inferimos a premência de metodologias que aproximassem mais o aluno dos conteúdos matemáticos daquele nível de ensino, pois, para que o ensino de Matemática faça sentido aos aprendizes, é necessário, do ponto de vista das teorias de aprendizagem que suportam a pesquisa, que o conteúdo esteja relacionado a aplicações práticas do dia a dia do discente. Se o aluno perceber que está estudando algo que possa utilizar no cotidiano, por si só, já sente maior motivação para aprender.

No outro extremo ao idealizado, constatamos nas escolas, a predominância de práticas conservadoras do ensino, que, às vezes, não revelam nenhuma aplicação prática dos conteúdos. Para Wiggins (1993), se aprender é mais uma concepção contextualizada e um julgamento coerente do que o conhecimento inerte, precisamos repensar a nossa confiança nas atividades e metodologias tradicionais.

Ciente do processo de ensino em que os alunos estavam imersos, para iniciar a intervenção, optamos por uma abordagem que remetesse os aprendizes a refletirem sobre a origem do conteúdo que seria trabalhado. Nesse sentido, utilizamos a estratégia da leitura de um texto, relacionado à origem histórica das *razões trigonométricas no triângulo retângulo*, seguida de roda de conversa com a apresentação do quadro evolutivo dos conceitos a elas relacionados.

A construção da análise a *priori*, segundo o preconizado por Artigue (1996), tem por objetivo determinar as escolhas efetuadas (as variáveis que deseja assumir como pertinentes), que permitem o controle do comportamento dos alunos e explicar seu sentido. Nesse sentido, foram criadas 9 etapas de atividades (já citadas na seção 3.2), divididas em três Partes (I, II e III), fundamentadas nas duas variáveis (macrodidáticas e microdidáticas) de potenciais distinguidas por Artigue (1996), que podem ser mobilizadas pelo professor.

Seguindo os pressupostos de Artigue (1996) e Pais (2011), para a elaboração das concepções das variáveis macrodidáticas, guiamo-nos pelas abordagens realizadas a partir da primeira Parte (I) da *sequência didática* que incluíam: aplicação do teste de conhecimentos inicial; construção do mapa conceitual inicial; leitura compartilhada do texto, *“Voltando ao passado para compreender o presente da trigonometria”* (ANEXO A); *paralelismo;* semelhança de triângulos retângulos, objetivando discutir e conhecer os conteúdos relacionados ao tema desta pesquisa “*razões trigonométricas no triângulo retângulo*”, com o objetivo de buscar:

- Identificar os conhecimentos prévios dos alunos participantes da pesquisa, a partir da contextualização histórica da trigonometria e do triângulo retângulo, associada a elementos conceituais mais amplos da trigonometria. O intuito da estratégia foi mobilizar e motivar os alunos no sentido de perceberem a evolução do conceito do tema, quando abordado o conteúdo (*razões trigonométricas no triângulo retângulo*), enfatizando assim a primeira dimensão das análises preliminares (*a dimensão epistemológica*).

Focado nas estruturações microdidáticas da *sequência didática*, na Parte (II), enfatizamos a diversificação tanto dos recursos de ensino utilizados, quanto o ambiente nos quais as atividades foram executadas. Nesta etapa, procuramos construir os conceitos das razões trigonométricas; debater a importância histórica do instrumento Astrolábio; construir Astrolábio e utilizá-lo em campo com os alunos. A proposição tencionou:

- Avaliar como o uso de variados recursos de ensino pode alterar a percepção dos alunos, desencadeando novos sentidos, significados, que potencializam os processos de aquisição e de retenção de conhecimento significativo. Ou seja, procuramos identificar as distintas maneiras de aprender dos alunos segundo a perspectiva da teoria que suporta o contexto investigativo. Para atingir o discernimento, lançamos mão de um conjunto de recursos devidamente explicitados na Parte (II) da *sequência didática* apresentada no (APÊNDICE F).

Prosseguindo na construção da estruturação da *sequência didática*, para as variáveis microdidáticas ou locais relativas à organização local da engenharia, isto é, a organização dos conteúdos didáticos em que se planeja cada sessão ou fase da *sequência didática*, foi elaborada a Parte (III) da *sequência didática*, com o intuito de:

- Construir uma visão sistemática de como os processos cognitivos retroalimentam-se e interagem entre si, proporcionando a percepção de indícios dos mecanismos de *diferenciação progressiva* e de *reconciliação integradora,* preconizados pela teoria da aprendizagem significativa de Ausubel (2003).

Nessa perspectiva, o tema *razões trigonométricas no triângulo retângulo* foi abordado em aspectos mais gerais e com maior complexidade em relação às situações iniciais. Nessa fase, o contexto da abordagem nos propiciou relacionar objetos, elementos e situações das razões trigonométricas no triângulo retângulo com questões do dia a dia dos alunos, no caso, “o cálculo de inclinação de ruas”. O contexto tencionou despertar a curiosidade do aluno, buscando a interação das concepções prévias (anteriores) com o tema. O desenvolvimento dessa atividade, auxiliada pelos recursos computadores, *tablets* e telefones celulares, foi necessário para possibilitar a *reconciliação integradora* dos conceitos implícitos, através de estratégias colaborativas que levassem o aluno a interagir, negociando significados, tendo o professor como mediador.

A avaliação da aprendizagem foi contínua, por meio das atividades propostas na *sequência didática*. As respostas foram registradas para fins de análise, com o objetivo de identificar as evidências de aprendizagem significativa do tema trabalhado. Nesse processo, algumas questões foram elaboradas, outras retiradas da literatura acerca do tema.

O encadeamento da *sequência didática* proposta (APÊNDICE F) é constituído de três Partes (I, II, III), subdivididas em nove Etapas de atividades, distribuídas em 22 horas/aula de 50 minutos, durante quatro semanas do mês de março de 2019, aplicadas aos alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental da Educação Básica, buscando fundamentar uma melhor compreensão dos conceitos das *razões trigonométricas no triângulo retângulo,* nesse nível de ensino. Reiteramos que a abordagem do tema foi guiada pelos pressupostos da *Teoria da Aprendizagem Significativa* subsidiada pela *Metodologia da Engenharia Didática*.

3.4 Caracterização do grupo

Participou da pesquisa uma turma de 30 alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental da Educação Básica, de um colégio da rede privada. O educandário ao qual pertencem os alunos está localizado na região suburbana da cidade de Lajeado, no estado do Rio Grande Sul/Brasil. O desenvolvimento das atividades laborais na escola são desempenhadas nos turnos matutino e vespertino. Esclarecemos que, feito o primeiro contato com os alunos, apenas 26 alunos se dispuseram, por meio dos seus responsáveis, a participar dessa pesquisa. Os outros quatro alunos, após explicitado aos responsáveis o desenvolvimento da pesquisa, decidiram participar de todas as atividades, com prerrogativa de que seus materiais produzidos na pesquisa não seriam utilizados como fonte de dados coletados. Todos os alunos participantes foram voluntários no desenvolvimento das atividades, atestados pela assinatura do termo de consentimento do aluno apresentado no (APÊNDICE D).

Com a finalidade de traçar o perfil dos alunos dessa turma, na condição de observador participante e de interventor da ação educativa, registramos em nosso diário de campo, informações acerca de algumas variáveis (sexo, idade, origem dos estudantes,...) consideradas importantes. Nessa perspectiva, a análise do diário contribuiu para a identificação da constituição do grupo de interagentes: 13 alunos do sexo masculino e 17 do sexo feminino, na faixa etária entre 13 e 16 anos; 26 alunos são oriundos da cidade de Lajeado-RS e o restante de cidades circunvizinhas. Os alunos têm origem em diversas classes sociais, com predominância de classe média. Poucos são provenientes da rede pública e de outras instituições da rede particular de ensino da cidade e região.

A escola dispõe de uma estrutura que proporcionou boas condições para realizar o trabalho docente. A biblioteca possui acervo atualizado e as salas de aula são equipadas, incluindo aparelho de projeção multimídia.

Explicitadas as variáveis relacionadas ao grupo e ao ambiente educacional, destacamos que a aplicação dessa pesquisa ocorreu em duas etapas, com turmas diferentes. A primeira etapa, denominada de Piloto (Anexo D), ocorreu na mesma escola, na turma do 9º Ano do Ensino Fundamental, durante os meses de novembro e dezembro de 2018. Para obter melhor fidelidade e riqueza de detalhes das descobertas, a *sequência didática* (APÊNDICE F) foi validada (reaplicada) com a turma de 9º Ano do Ensino Fundamental, no mês de março de 2019, num período de 22 horas-aula de 50 minutos. Para efeito das análises dos resultados, tomamos os indicativos obtidos da segunda turma, pois, em nenhum momento, objetivamos comparar os resultados obtidos no Piloto (aprimoramento da *sequência didática*) com os obtidos na reaplicação da *sequência didática*. Apresentados os instrumentos que nos auxiliaram no decorrer da pesquisa, assim como a estruturação da sequência didática, seguida da identificação do grupo, no capítulo seguinte, aludiremos à análise dos dados que emergiram da investigação.

A EXPERIÊNCIA DE ENSINO

Neste Capítulo, evidenciamos a análise da experiência de ensino fundamentada na *Teoria de Aprendizagem Significativa* e na *Engenharia Didática,* que embasaram a *sequência didática* proposta para essa investigação. O foco é que a contextualização e a discussão acerca da vivência ensejem respostas aos objetivos e à questão da pesquisa. Por meio das conclusões norteadas pelo processo de categorização da *Análise Textual Discursiva,* destacamos os pontos considerados mais relevantes. Ressaltamos, ainda, que durante todo o processo, embasamo-nos em achados e em discursos de autores que já aludem ideias referentes à temática. Assim, dividimos esse Capítulo em duas seções correspondentes as categorias e a síntese dos resultados, a partir dos dados emergentes dos instrumentos de coleta de dados utilizados, e que, estão relacionadas aos objetivos elencados para investigação: 4.1 Categorias elaboradas; 4.2 Síntese dos resultados.

4.1 Categorias elaboradas

A seção, que está dividida em três subseções: 4.1.1 Categoria dos conhecimentos prévios; 4.1.2 Categoria dos recursos de ensino variados e 4.1.3 Categoria da *diferenciação progressiva* e a *reconciliação integradora*. Nessas aludimos acerca dos nossos achados e como eles estão imbricados a pesquisas já desenvolvidas anteriormente, além de apontar outras possibilidades de interpretações dos fatos.

4.1.1 Conhecimentos prévios emergentes

De acordo com Ausubel (2003), inferimos que todo conhecimento somente é possível porque há outros anteriores. Nesse sentido, estamos continuamente elaborando e reelaborando a construção do nosso conhecimento, que, consequentemente, atinge, com o passar das nossas experiências, níveis cada vez mais complexos.

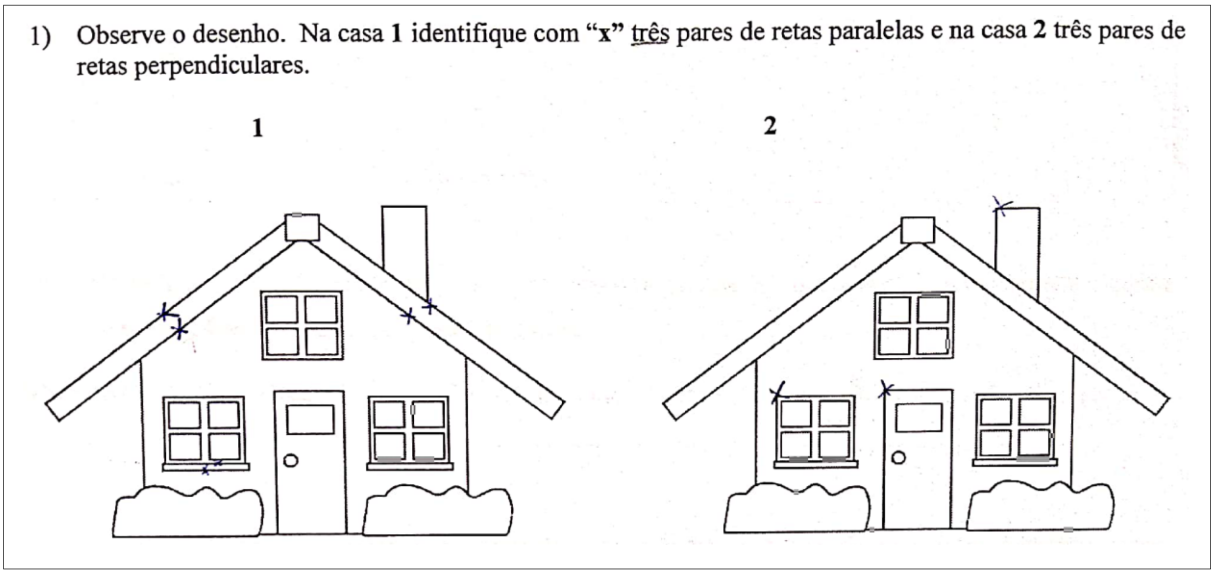
Nesse sentido, é preciso considerar que cada aluno possui heranças matemáticas adquiridas ao longo da vida, dentro e fora da escola. Cada um traz conceitos matemáticos, geométricos, estatísticos, entre outros, que foram desenvolvidos no seu dia a dia e também com o passar dos anos escolares. De acordo com Ocanha (2016), essa bagagem deve ser levada em consideração, e, quando tomada como base, faz com que o aprendizado tenha mais significado e seja retido pelo estudante de maneira mais eficaz.

Em face do exposto, não resta dúvida de que a força conferida aos conhecimentos prévios transformou as rotinas das salas de aula. Nesse sentido, alinhando nosso pensamento às proposições de Ausubel (2003), inferimos que o caminho mais adequado para identificar os saberes dos aprendizes é propor situações-problema, desafios que lhes impõem mobilizar o conhecimento que possuem para resolver a tarefa que lhes é apresentada. Nessa pesquisa, foi necessário buscar nos conhecimentos prévios dos alunos, por meio das respostas ao nosso primeiro teste de conhecimento (APÊNDICE B) e da construção do mapa conceitual inicial. As ferramentas de coleta de dados utilizadas nos propiciaram possibilidades de identificação de elementos para fazer a ligação entre o já ancorado em suas estruturas cognitivas e o novo conhecimento que se apresentava. Nessa investida, também nos valemos da observação sistemática e de registros feitos em ficha avaliativa (APÊNDICE A).

O teste de conhecimento (APÊNDICE B) foi aplicado aos alunos participantes da pesquisa com o intuito de identificar conhecimentos prévios relevantes em suas estruturas cognitivas, a respeito do tema, *razões trigonométricas* *no triângulo retângulo,* para a subsequente reestruturação da *sequência didática,* ancorada nos princípios da *Engenharia Didática,* que nos auxiliou quanto ao que deveríamos priorizar no desenvolvimento da *sequência didática* a ser proposta.

Em razão da organização do teste de conhecimentos, a questão 1 teve como objetivo verificar os conhecimentos prévios dos alunos sobre *retas*. Para o estudo das *razões trigonométricas no triângulo retângulo*, os conhecimentos básicos de geometria são extremamente importantes e foram elencados como *subsunçores*, conforme destacamos a seguir, na Figura 5.

Figura 5 – Resposta da questão 1 do teste de conhecimentos inicial



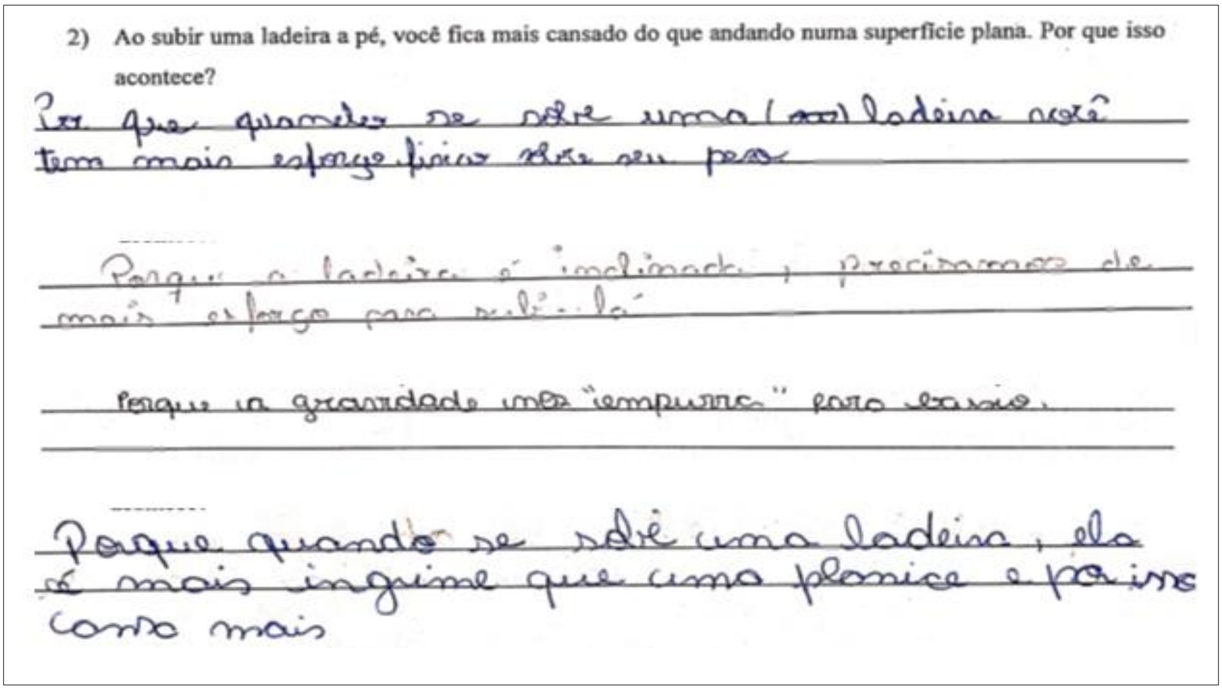
Fonte: o autor, 2019.

Conforme exposto na questão, procuramos mobilizar, inicialmente, conhecimentos básicos em Geometria. O reconhecimento dos *subsunçores, retas paralelas* e *retas perpendiculares,* configurou, nessa pesquisa, o primeiro passo para a construção de uma aprendizagem significativa. Em relação à questão apresentada, todos os alunos pesquisados identificaram corretamente as retas, o que favoreceu o avanço das discussões acerca do assunto. Quanto à base teórica do questionamento, apoiamo-nos nas concepções de Novak (2010) e Moreira (2011[a]). Esses autores salientam que é primordial que o professor (investigador), enquanto mediador, saiba quais os conceitos preliminares e vulgares que seus alunos sustentam para que possam tomar decisões quanto a esclarecimentos ou não dos conceitos em construção.

Nesse perfil, salientamos que a vivência de cada indivíduo, a experiência cotidiana individual influenciam o aprendizado e também fazem parte de seus *subsunçores*. Esta parte é exclusiva de cada um. Unindo cada conhecimento, forma-se a base necessária para o progresso da aprendizagem. Segundo Ocanha (2016), a não identificação de tais conhecimentos na fase inicial pode levar o professor, na etapa de reconhecimento e resgate de conceitos, a não sanar lacunas de aprendizagem dos estudantes, que ficaram abertas ao longo dos anos escolares.

Nesse sentido, na questão 2, utilizamos uma situação que buscou a identificação de conhecimentos prévios acerca do ângulo de inclinação, *subsunçor,* essencial para a construção do conceito das *razões trigonométricas*. Na Figura 6, relacionamos as respostas mais recorrentes inferidas pelos alunos.

Figura 6 – Resposta a questão 2 do teste de conhecimentos inicial


2) **Ao subir uma ladeira a pé, você fica mais cansado do que andando numa superfície plana. Por que isso acontece?**

Por que quando se sobe uma ladeira você tem mais esforço físico sobre seu peso

Porque a ladeira é inclinada, precisamos de mais esforço para subi-la

Porque a gravidade nos "empurra" para baixo.

Porque quando se sobe uma ladeira, ela é mais ingrime que uma planice e por isso canso mais

Fonte: o autor, 2019.

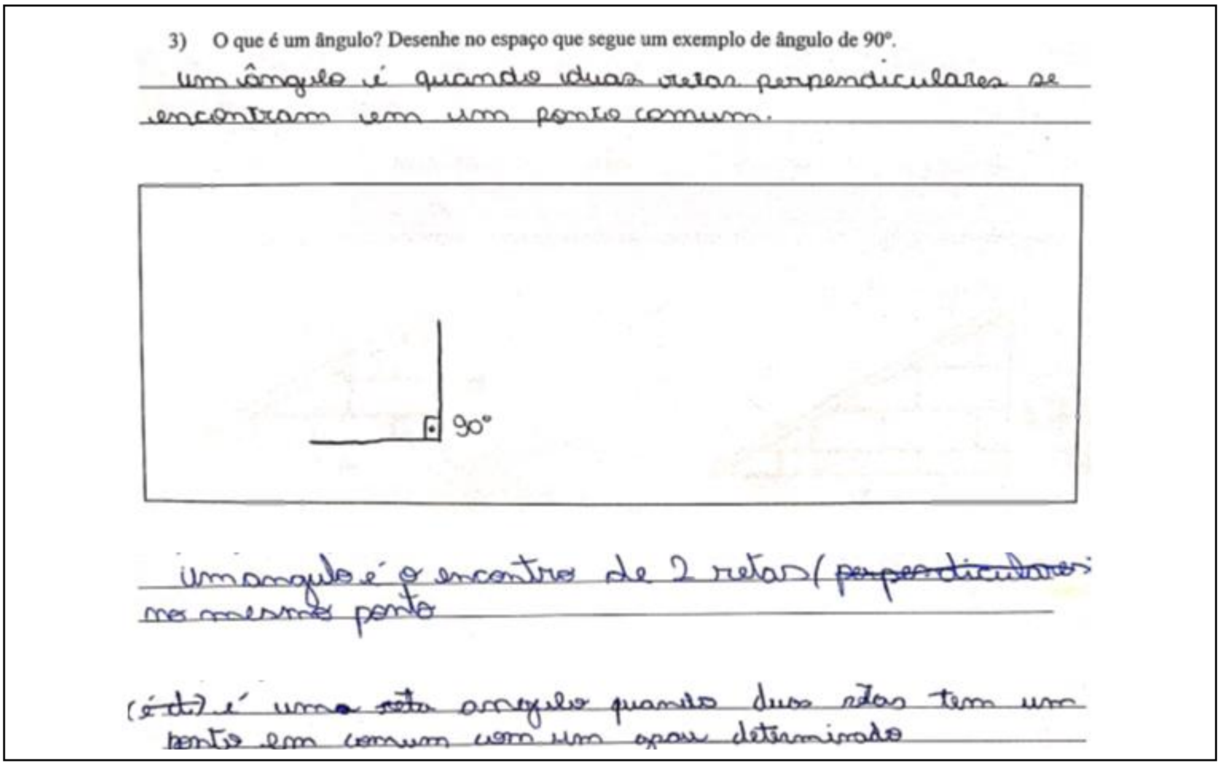
Observamos, a partir das respostas mais recorrentes, uma aproximação com conceitos relacionados à Física, como: *esforço físico, peso, íngreme, gravidade,* o que para nós foi incomum. O fato de não mencionarem o conceito de índice de subida e a relação com o ângulo de inclinação, que, a nosso ver, se aproximaria do conceito matemático e, portanto, mais relacionado às *razões trigonométricas no triângulo retângulo,* permite deduzir que tal representação deve estar associada a alguma experiência dos alunos com a temática, em algum momento da vida escolar, ou fora dela, o que influencia suas inferências acerca do questionamento. No entanto, os depoimentos evidenciam, segundo Ausubel (1968), conceitos mais arraigados nas suas estruturas cognitivas dos aprendizes.

O fato explicitado é corroborado também pelas percepções de Ausubel (2003). Para o autor, os discursos de justificativa dos alunos expressam experiências de aprendizagem passadas que influenciam de maneira positiva ou negativa, a nova aprendizagem, que, possivelmente, pode ser afetada pelos conhecimentos prévios existentes em suas estruturas cognitivas.

Nessa mesma perspectiva, o estudo de Reis (2016) destaca que a interação entre novas ideias e expressões simbólicas não ocorre com qualquer ideia prévia. Para o autor, a relação só acontece com o conhecimento relevante já existente na estrutura cognitiva do ser que aprende. Além disso, a interação deve ser não literal, ou seja, o que é incorporado é a substância do novo conhecimento, não só as palavras usadas para expressá-la.

Na questão 3, buscamos identificar a concepção dos alunos sobre ângulo e se eles eram capazes de representar um ângulo de 90º. A observação acerca da constituição do ângulo reto se justifica pelo fato de esse elemento fazer parte da estrutura física do triângulo retângulo, conforme representado na Figura 7.

Figura 7 – Resposta a questão 3 do teste de conhecimentos inicial



3) O que é um ângulo? Desenhe no espaço que segue um exemplo de ângulo de 90°.

Um ângulo é quando duas retas perpendiculares se encontram em um ponto comum.

90°

Um angulo é o encontro de 2 retas (~~perpendiculares~~ no mesmo ponto

(é ~~dt~~) é uma ~~reta~~ angulo quando duas retas tem um ponto em comum com um espaço determinado

Fonte: o autor, 2019.

Na primeira resposta, identificamos certa confusão em relação à definição de ângulo, pois o aluno associou o conceito ao encontro de duas retas perpendiculares. Esperávamos que os alunos respondessem que “é a união de duas linhas cuja origem é compartilhada”. Para o observado acima, inferimos duas possibilidades:

a) A falta de concentração para o discernimento das duas situações;

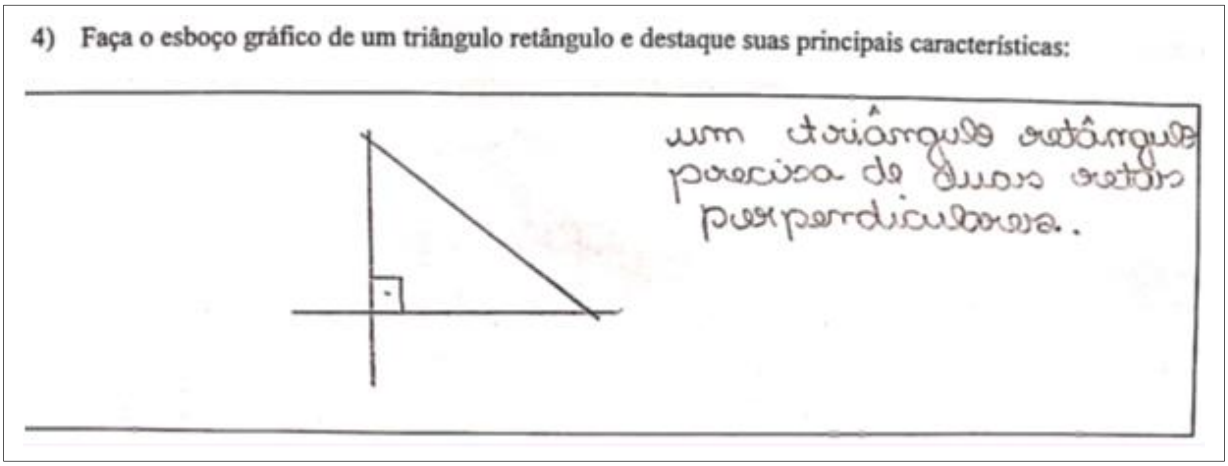
b) Uma situação escolar, ou não, já vivenciada, que lhe permitiu tal interpretação.

As duas repostas subsequentes também evidenciam dissonância quanto ao conceito solicitado, pois os alunos tratam desse conceito como estando associado ao encontro de *duas retas*, e não como “medida da abertura entre dois segmentos de reta”. Essa mesma dificuldade foi identificada em pesquisa realizada por Pereira (2011), na abordagem feita por meio de aula expositiva com questionamento oral, em que os alunos pesquisados apresentaram dificuldades na exposição do conceito de ângulo por região, entre semirretas.

De maneira geral, as respostas dos alunos apontaram indícios de conhecimentos prévios acerca do assunto; porém, é preciso considerar a margem de distorção implícita nos depoimentos. Frente a esse fato, atentamos para que, no momento seguinte do desenvolvimento da *sequência didática,* fossem explorados (revisados) conceitos geométricos que ampliassem a visão dos aprendizes acerca do apresentado, com apresentação detalhada, numa tentativa de sanar eventuais equívocos conceituais passados/futuros, como, por exemplo, o conceito de ângulo.

Na questão 4, buscamos identificar se os alunos tinham a noção exata do que era um triângulo retângulo e se eram capazes de apontar elementos que fazem parte da sua constituição. Esperávamos que inferissem acerca dos ângulos reto e agudo, componentes da forma geométrica, bem como, que reportassem à altura e à base, entre outros conhecimentos, que poderiam ser suscitados. O reconhecimento dos elementos constituintes do triângulo retângulo pelos alunos nos daria pistas sobre o que eles já conheciam a respeito do polígono. Nesse sentido, apresentamos, na Figura 8, a resposta mais citada.

Figura 8 – Resposta a questão 4 do teste de conhecimentos inicial



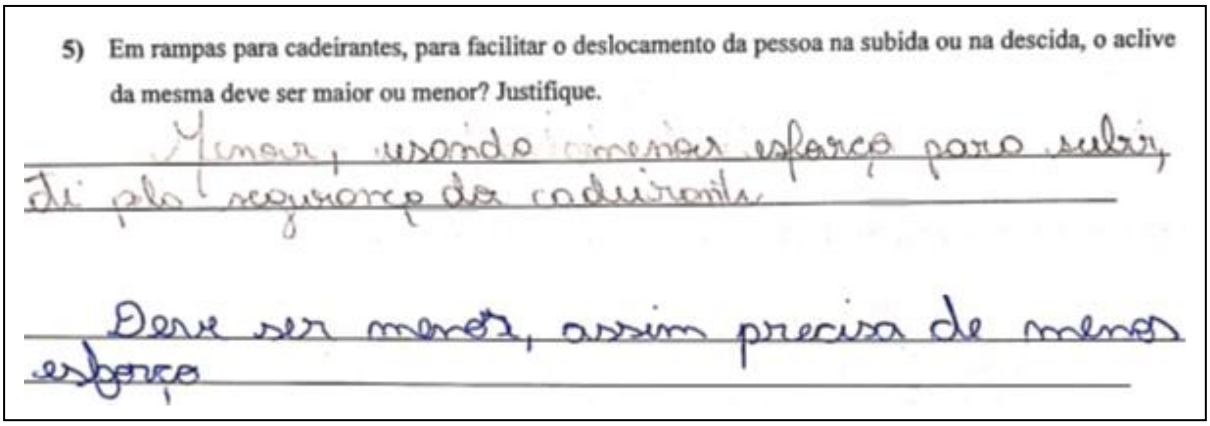
Fonte: o autor, 2019.

Quanto ao esboço do triângulo retângulo, visualizado na Figura 8, os alunos demonstraram familiaridade com a representação geométrica plana do polígono. Já, em se tratando da apresentação de elementos presentes em sua constituição, a maioria dos alunos não fez nenhum apontamento, o que não significa que a turma toda apresentasse essa inconsistência. Seguindo o sugerido, alguns alunos da turma investigada apontaram como características, elementos como: *“possui um* *ângulo reto", "seu maior ângulo tem 90º", "tem hipotenusa e tem catetos", "a soma dos seus ângulos é 180º", "tem teorema de Pitágoras".*

As associações desses elementos com o triângulo, como já mencionado na segunda questão, estão relacionadas às experiências de cada aprendiz, ao longo da vida, o que pode ser exemplificado com a fala *"tem teorema de Pitágoras"*. Apesar de os estudos trigonométricos terem relação com o teorema de Pitágoras, não significa que ele seja uma característica, ainda que possa ser aplicado a qualquer triângulo retângulo. Consolidando nossos argumentos anteriores, destacamos que o aprendiz teria que ter conhecimento claro de que a utilização do teorema é um recurso para determinar valores de medidas desconhecidas. A identificação do conhecimento distorcido nos oportunizou reorientar a abordagem do assunto, para que o aluno fosse capaz de discernir uma aplicação de um conceito. Esta forma de agir vem ao encontro do argumento em favor da importância de levar em conta as concepções do estudante, considerando também a análise de seus erros (CURY, 2007).

A questão 5 também envolveu a relação de abertura entre dois segmentos de reta, ou seja, através do questionamento, procuramos identificar o conhecimento dos alunos acerca da relação entre a distância e a altura de uma rampa, conforme destacamos no recorte apresentado na Figura 9.

Figura 9 – Resposta a questão 5


5) Em rampas para cadeirantes, para facilitar o deslocamento da pessoa na subida ou na descida, o aclive da mesma deve ser maior ou menor? Justifique.

Menor, usando menor esforço para subir, e pela segurança do cadeirante

Deve ser menor, assim precisa de menos esforço

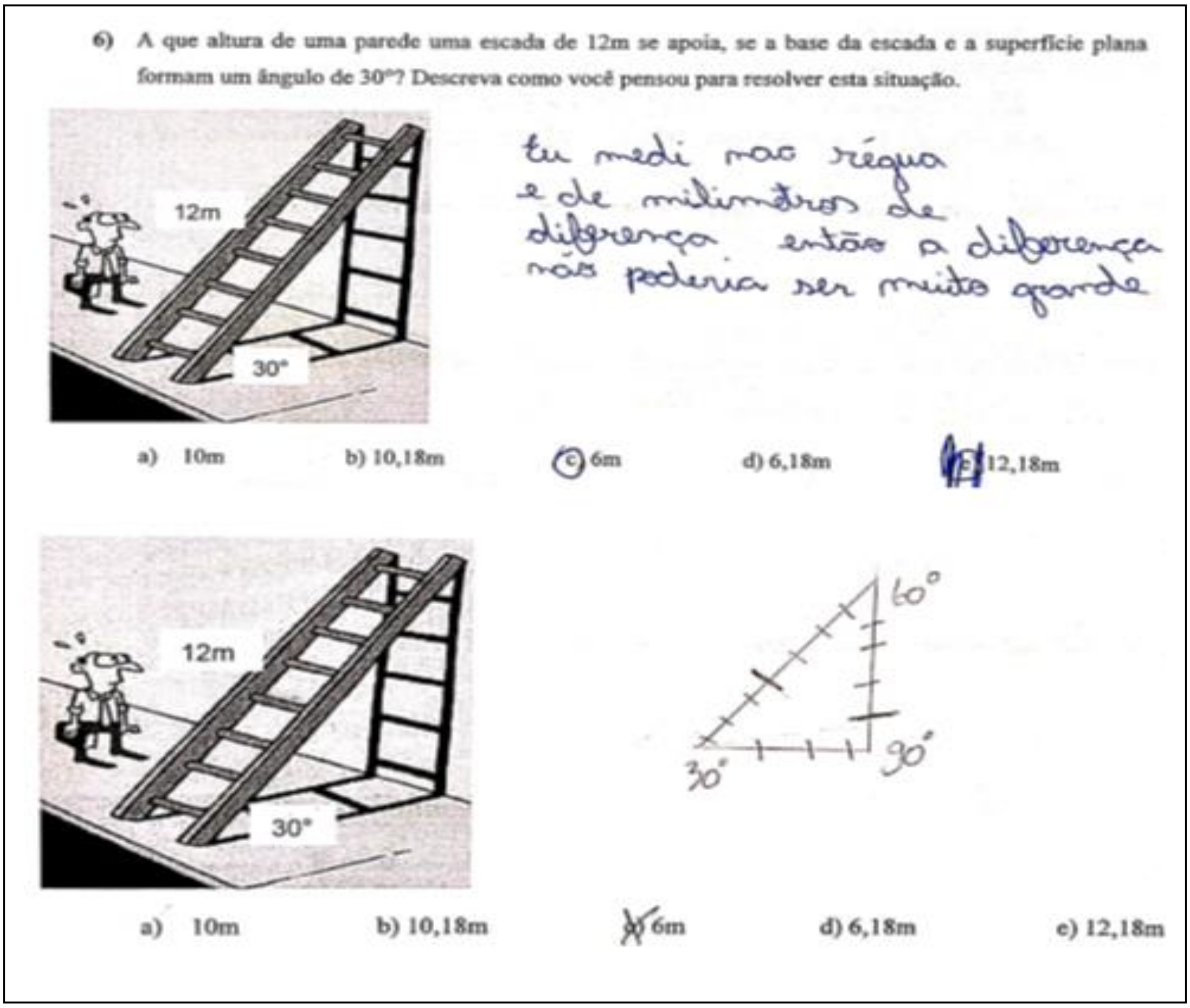
Fonte: o autor, 2019.

Nas respostas, os alunos procuraram justificar o porquê da necessidade de as rampas para cadeirantes serem construídas com menor aclive, o que demonstra o conhecimento empírico trazido pelos alunos para a sala de aula. Nesse sentido, outras explicações foram suscitadas pelos alunos, como, por exemplo: *“Menor, para ele poder subir e descer devagar”; “Menor para que a subida seja suave diminuindo o esforço físico do cadeirante”; “Menor, para subir e descer com segurança”; “Menor. Quanto menor o aclive, menor será o esforço”; “Menor, porque se for maior, precisam fazer muito esforço para mover a cadeira”.*

Para Ausubel (2003), Novak e Gowin (1984) e Moreira (2009, 2011[a]), quando o aluno é colocado diante de uma situação e consegue enxergar ali elementos por ele conhecidos, bem como, parte do que já conhece, ele consegue ampliar seus conhecimentos, pois o assunto estudado passa a ter significado, sendo mais facilmente assimilado e armazenado. Segundo Jonassen (2007), o aluno constrói o que aprende. Nessa perspectiva, de acordo com Bicudo (1999), para construir o saber, o aprendiz aplica os seus conhecimentos e modos de pensar ao objeto de estudo. A partir das ações, age, observa, seleciona os aspectos que mais chamam sua atenção, estabelece relações entre os vários aspectos deste objeto e lhe atribui significados, chegando a uma interpretação própria.

Na questão de número 6, tentamos mobilizar os conhecimentos prévios dos alunos por meio de uma imagem que associava o comprimento de um lado do triângulo retângulo e um ângulo fornecido. Desde a escolha da questão, já imaginávamos que os alunos do nível de ensino, sem os devidos *subsunçores,* poderiam apresentar dificuldade para respondê-la, conforme demonstram os estratos apresentados na Figura 10.

Figura 10 – Respostas ao questionamento 6

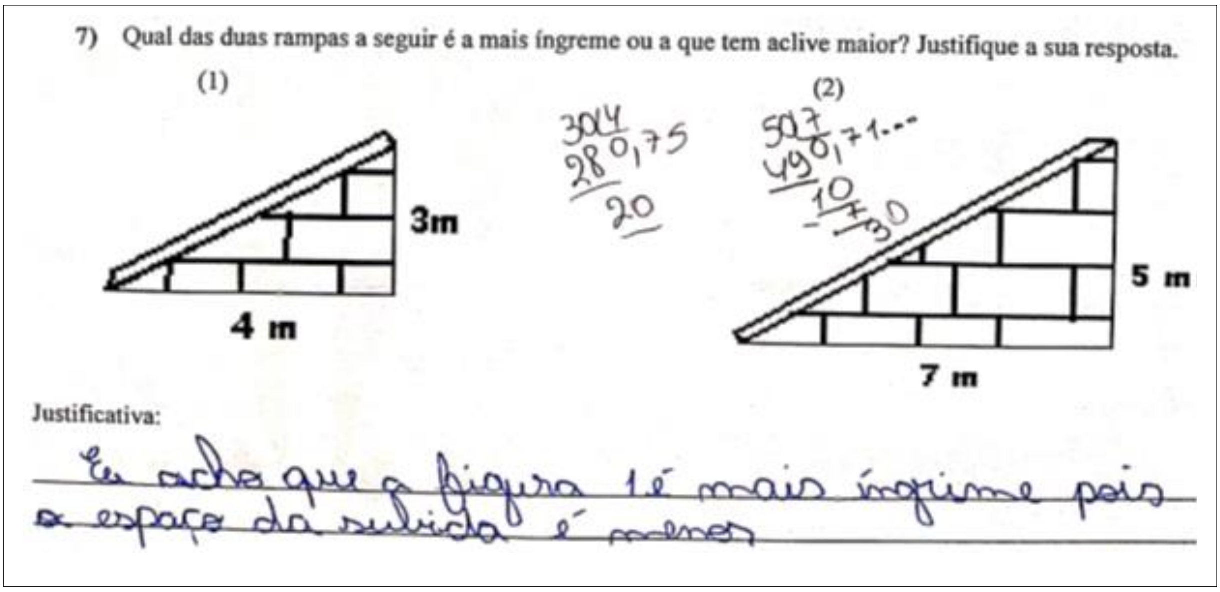


Fonte: o autor, 2019.

Observamos falta de clareza nas justificativas dadas, nas 8 respostas corretas identificadas, o que nos leva a crer que esses alunos agiram intuitivamente. Os poucos acertos e explicações inconsistentes, como já suspeitávamos, além do fato de 18 alunos terem deixado o questionamento em branco podem ser atribuídos à falta de *subsunçores,* considerados a mola propulsora para alcançar aprendizagens mais elaboradas, ampliadas, significativas. Outra possibilidade aventada foi à falta de vocabulário para expressarem seus conhecimentos, uma vez que não costumavam escrever justificativas em questões de Matemática.

A questão 7 também buscou, por meio da apresentação de uma imagem, evidenciar indícios de conhecimentos dos alunos, quando submetidos a uma situação em que o triângulo retângulo apresenta somente relação entre dois de seus lados, conforme apresentamos na Figura 11.

Figura 11 – Resposta a questão 7



Fonte: o autor, 2019.

Observamos que, apesar de esse aluno ter noção de proporcionalidade entre os lados do triângulo, falta-lhe segurança para relacionar sua resposta às *razões trigonométricas no triângulo retângulo e* informar de maneira convicta qual seria o maior ângulo de subida. Nessa atividade, somente oito alunos responderam corretamente ao questionamento, porém com justificativas que nos levam a acreditar que tais associações estão mais relacionadas à Física do que à própria Matemática, conforme evidenciado nos depoimentos: *“O plano inclinado de maior aclive é o número 1”; “a rampa 1, porque parece mais alta que a 2”; “a de número 1, porque tem a menor diferença entre os lados”; a de número 1 porque é mais curta”*. Inferimos que tais observações podem ter origem em situações vivenciadas no cotidiano, ou na realização de atividades relacionadas à Física, uma vez que nesse nível de ensino, a disciplina já faz parte da grade curricular.

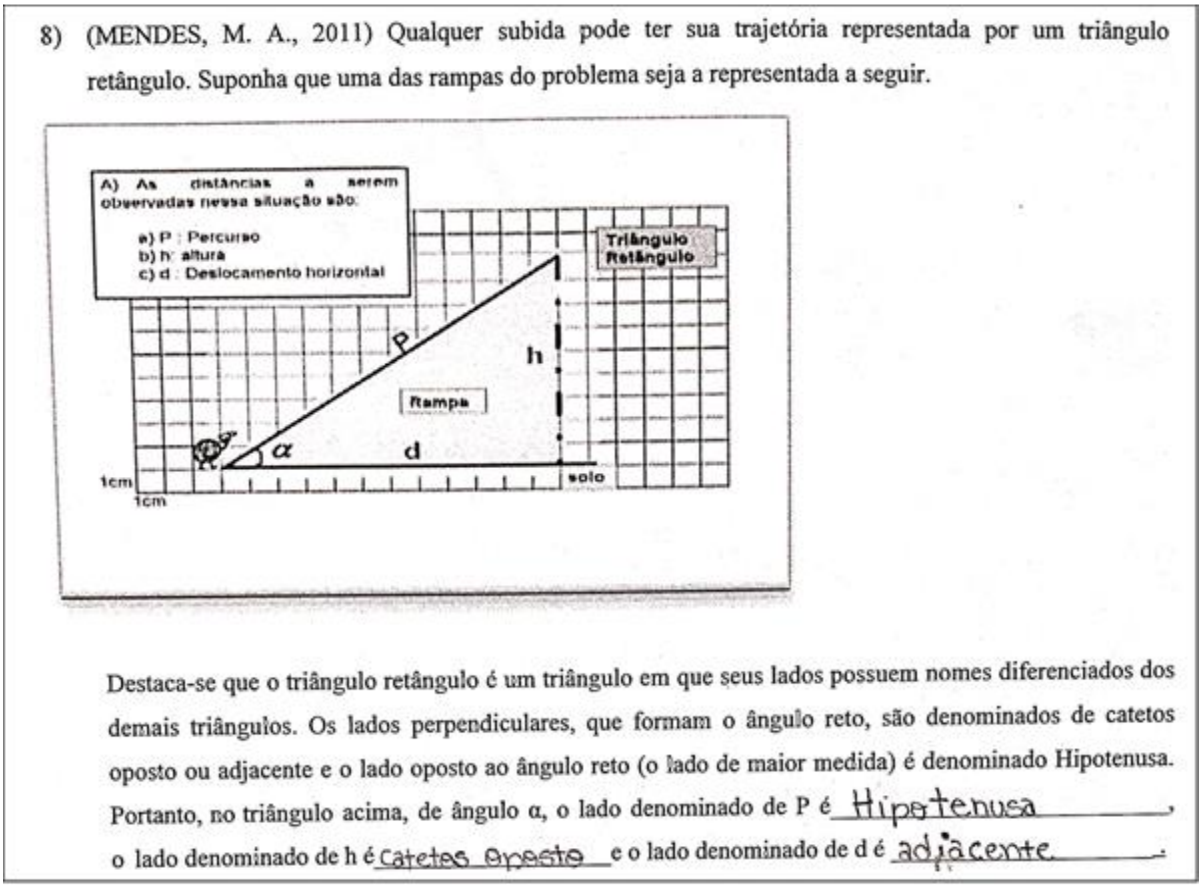
Os discursos dos alunos pesquisados se assemelham aos depoimentos relacionados por Ribeiro (2015), em pesquisa realizada com alunos do Ensino Médio, alunos do primeiro semestre do curso de licenciatura em Matemática e alunos do quarto período do curso de Matemática, que faziam parte do programa do

PIBID. Segundo o autor, os discursos de justificativa dos alunos expressam experiências de aprendizagem passadas, que, nesse caso, influenciaram negativamente a aquisição do conhecimento, gerando um conjunto de justificativas equivocadas e sem relação com a Matemática.

Ao constatarmos similaridades entre nossos achados e os da pesquisa realizada por Ribeiro (2015), presumimos que a falta de relação prática do conteúdo com as práticas de sala de aula pode ser responsável pela perpetuação de determinadas incoerências, levando o aluno ao desconhecimento acadêmico acerca do assunto. Nesse sentido, o tratamento contextualizado do conhecimento é um dos recursos do professor, para tirar o aluno da condição de espectador passivo e conduzi-lo à condição de construtor do próprio conhecimento.

Nesse sentido, a questão 8 do teste de conhecimentos inicial objetivou a verificação das concepções prévias dos alunos a respeito da caracterização do triângulo retângulo, por meio da identificação dos catetos e da hipotenusa na figura exposta no questionamento explicitado na Figura 12.

Figura 12 – resposta a questão 8


8) (MENDES, M. A., 2011) Qualquer subida pode ter sua trajetória representada por um triângulo retângulo. Suponha que uma das rampas do problema seja a representada a seguir.

Destaca-se que o triângulo retângulo é um triângulo em que seus lados possuem nomes diferenciados dos demais triângulos. Os lados perpendiculares, que formam o ângulo reto, são denominados de catetos oposto ou adjacente e o lado oposto ao ângulo reto (o lado de maior medida) é denominado Hipotenusa. Portanto, no triângulo acima, de ângulo α, o lado denominado de P é Hipotenusa, o lado denominado de h é catetos oposto e o lado denominado de d é adjacente.

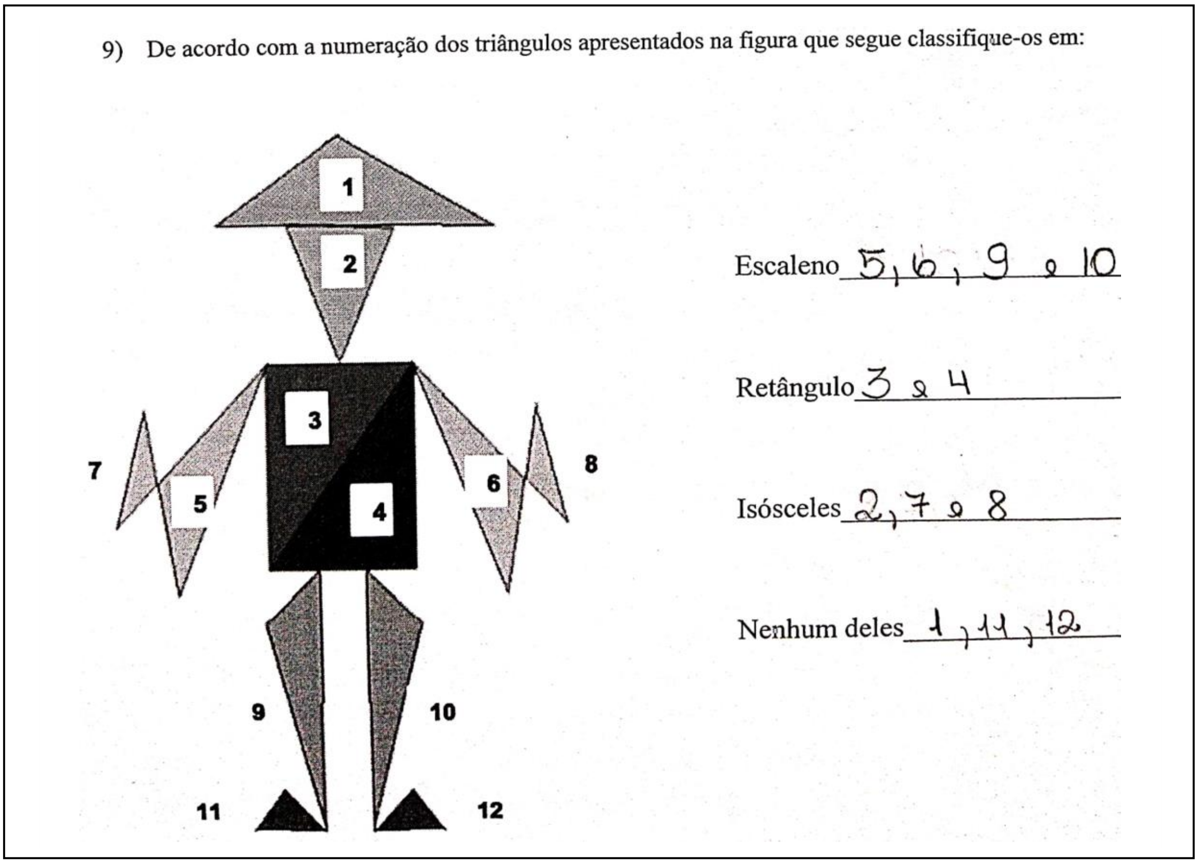
Fonte: o autor, 2019.

Dos 26 alunos participantes da pesquisa, somente 9 relacionaram corretamente os lados do triângulo retângulo com as devidas denominações. Outros 5 alunos, apesar de identificarem corretamente a hipotenusa, confundiram-na com a identificação dos catetos. De qualquer forma, observamos que os alunos apresentaram, mesmo de maneira desorganizada, conhecimento acerca da caracterização do triângulo retângulo.

Analisando os resultados, inferimos que os números apresentados representam um avanço em relação aos percentuais retratados por Klein et. al. (2011) para esse mesmo questionamento, feito a esse mesmo nível de ensino. Segundo os autores, para essa categoria, naquele momento, apenas 25% dos 16 alunos pesquisados responderam corretamente ao questionamento, demonstrando assim o baixo nível de conhecimentos prévios daqueles alunos, a respeito do tema.

Na questão de número 9, buscamos, a partir da confecção de um boneco montado com uma série de triângulos, verificar se havia *subsunçores* acerca dos diferentes tipos de triângulos utilizados, conforme representação da Figura 13 a seguir.

Figura 13 – Recorte da resposta da questão 9

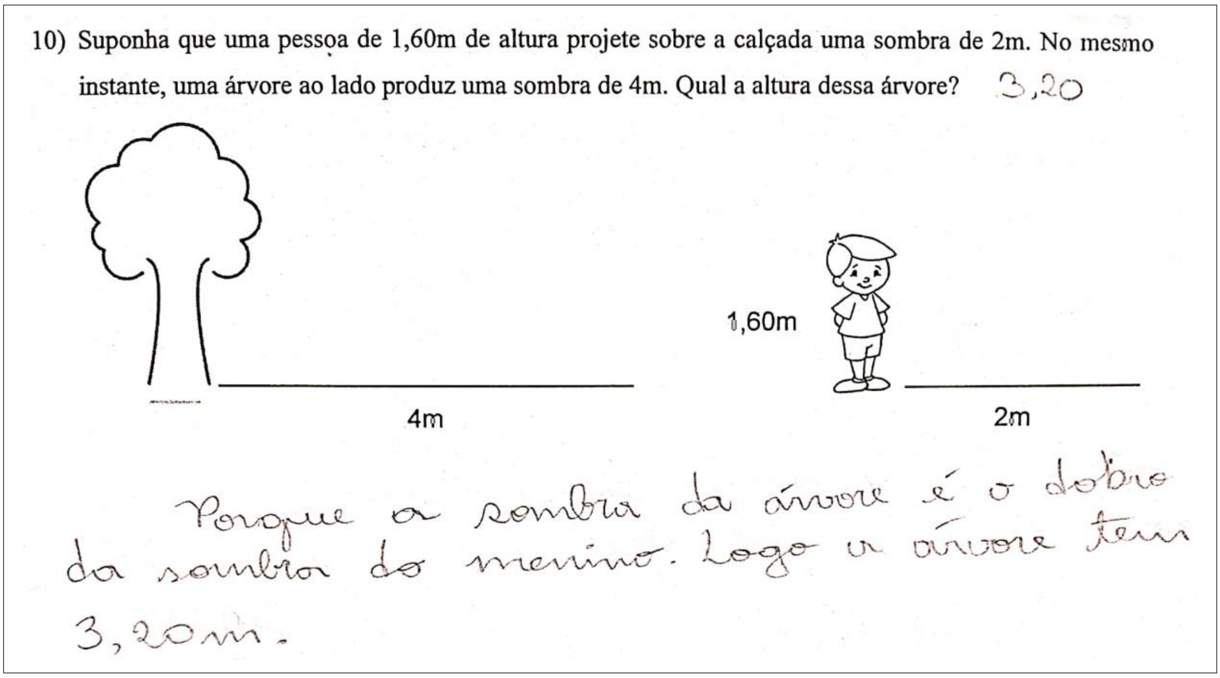


Fonte: o autor, 2019.

Identificamos por meio das respostas apresentadas, que a maioria dos alunos era capaz de reconhecer os tipos de triângulos mais usuais. Após a atividade realizada, imaginamos que a forma como foi pensada a questão pode ter dado a entender que ela estava relacionada ao princípio da ludicidade. Nesse sentido, Mascarin (2017) defende que o uso de recurso de caráter lúdico pode suscitar nos alunos o prazer de comparar as situações de ensino de sala de aula com aspectos da realidade, ou que envolvam objetos meramente matemáticos.

A questão de número 10, última do teste de conhecimentos inicial, buscou identificar a razão de proporcionalidade*, subsunçor* necessário para o estudo da semelhança entre triângulos e, consequentemente, para as *razões trigonométricas no triângulo retângulo*. Nesse sentido, destacamos uma das respostas dadas pelos alunos à referida questão, explicitada na Figura 14 a seguir.

Figura 14 – Uma das respostas à questão 10



Fonte: o autor, 2019.

Podemos considerar que o recorte expõe a melhor das respostas suscitadas pelos alunos. Mesmo o aluno não apresentando nenhum algoritmo, seu depoimento deixa clara sua intencionalidade. Outros 4 alunos tiveram dificuldade de expressar e registrar seus pensamentos. A maioria, 21 alunos, entregou o teste de conhecimentos sem responder à questão.

Questionados no encontro seguinte acerca do fato, alguns alegaram que o tempo reservado para responderem aos questionamentos foi insuficiente. Considerando os depoimentos dos alunos, tomamos essa precaução na exposição do assunto na *sequência didática*.

Em síntese, a partir das concepções prévias advindas da avaliação inicial dos questionamentos, que demonstraram um número elevado de conhecimentos prévios ancorados na estrutura cognitiva dos alunos, inferimos que parte dos pesquisados já dominava de maneira elementar, assuntos como: *paralelas e perpendiculares; ângulo; conceituação e caracterização do triângulo retângulo; relações métricas no triângulo retângulo; semelhança entre triângulos retângulos; teorema de Pitágoras e relações trigonométricas no triângulo retângulo;*

proporcionalidade; além dos tipos de triângulos mais recorrentes: escaleno, retângulo e isósceles.

No entanto, seria necessário um trabalho de organização das estruturas cognitivas, no sentido de elucidar como tais conceitos estavam relacionados. Observamos, também, que os pesquisados tiveram dificuldades em identificar e relacionar ângulo com lados do triângulo e em identificarem e visualizarem relações de proporcionalidade, levando-nos a, no decorrer da investigação, revisitar diariamente o assunto.

Nesse sentido, antes de solicitar a construção do mapa conceitual inicial, mediante levantamento das respostas do teste de conhecimentos inicial, que estava repleto de informações acerca dos conhecimentos prévios dos alunos, como também de conhecimentos não tão consolidados, optamos pela introdução de um organizador avançado. Essa opção foi necessária pelo fato de a maioria dos alunos apresentarem conhecimento desorganizado, não hierarquizado.

Mas o que é um organizador avançado?

Segundo Ausubel (2003, p. 11), “é um mecanismo pedagógico que ajuda a implementar princípios de clareza e de estabilidade das ideias ancoradas, estabelecendo uma ligação entre aquilo que o aprendiz já sabe e aquilo que precisa saber, caso necessite aprender novos materiais”. Para o autor, o organizador avançado resolve esta dificuldade, desempenhando o papel de mediador. Também facilita a aprendizagem através da alteração das ideias potencialmente ancoradas.

Dessa forma, Ausubel (2003) salienta que os organizadores avançados podem funcionar eficazmente para uma variedade de aprendizes, pois cada um possui uma estrutura cognitiva de algum modo idiossincrática. Os organizadores também podem fornecer ou alterar ideias ancoradas a um nível subordinante, pois apresentam-se num nível mais elevado de abstração, de generalidade e de inclusão do que os novos materiais a serem apreendidos. Por outro lado, para o autor, os resumos e as visões gerais apresentam-se, geralmente, no mesmo nível de abstração, de generalidade e de inclusão do próprio material de aprendizagem. Apenas salientam os pontos mais evidentes do material, omitindo informações menos importantes.

Partindo dos princípios estabelecidos por Ausubel (2003), utilizamos um texto que trazia inúmeras informações e conceitos relacionados ao tema foco da pesquisa. A investida nos auxiliou no passo seguinte do processo investigativo, que foi a proposição da construção individual do mapa conceitual inicial, cujo tema gerador era a “trigonometria no triângulo retângulo”. Tencionávamos com a ação, que os alunos, após a investida, atingissem um melhor grau de organização dos encadeamentos dos próprios conhecimentos prévios potencialmente ancorados.

Após a exposição oral acerca da relevância de alguns conceitos (ângulo, triângulo, semelhança, *seno*, *cosseno* e *tangente*) para a temática pelo investigador, os alunos foram orientados acerca dos procedimentos necessários para a construção do mapa. Os encaminhamentos foram repassados aos alunos pelo pesquisador, que salientou que o mapa teria como ponto de partida, a questão geradora citada anteriormente e que, a partir dela, seguiria a estrutura hierárquica do mapa, no qual o aluno identificaria e relacionaria o conceito central por meio de palavras de ligação, ou não, com conceitos mais específicos, conforme sugerido por Novak e Gowin (1984). Para Novak e Canãs (2010, p. 43):

> Um bom modo de definir o contexto para um mapa conceitual é instituir uma questão focal, ou seja, uma pergunta que especifica claramente o problema ou questão que o mapa conceitual deve ajudar a resolver. Todo mapa conceitual responde a uma questão focal, e uma boa questão focal pode conduzir a um mapa conceitual muito mais rico.

Seguindo as orientações dos autores, expomos aos alunos, por meio de um projetor multimídia, alguns mapas que mostravam a evolução de um mapa “simples”, com poucos conceitos e palavras de ligação para mapas mais “complexos”. A intenção da utilização da ferramenta foi investigar se, a partir do conhecimento prévio, os alunos conseguiriam identificar conceitos e relações hierárquicas entre temas que se intercruzam. Segundo Novak e Gowin (1984, p. 57),

> o mapa conceitual utilizado como um instrumento prévio à instrução implica em: buscar conceitos relevantes na estrutura cognitiva; [...] reconhecer conceitos mais gerais e mais específicos que se enquadrem na organização hierárquica do mapa.

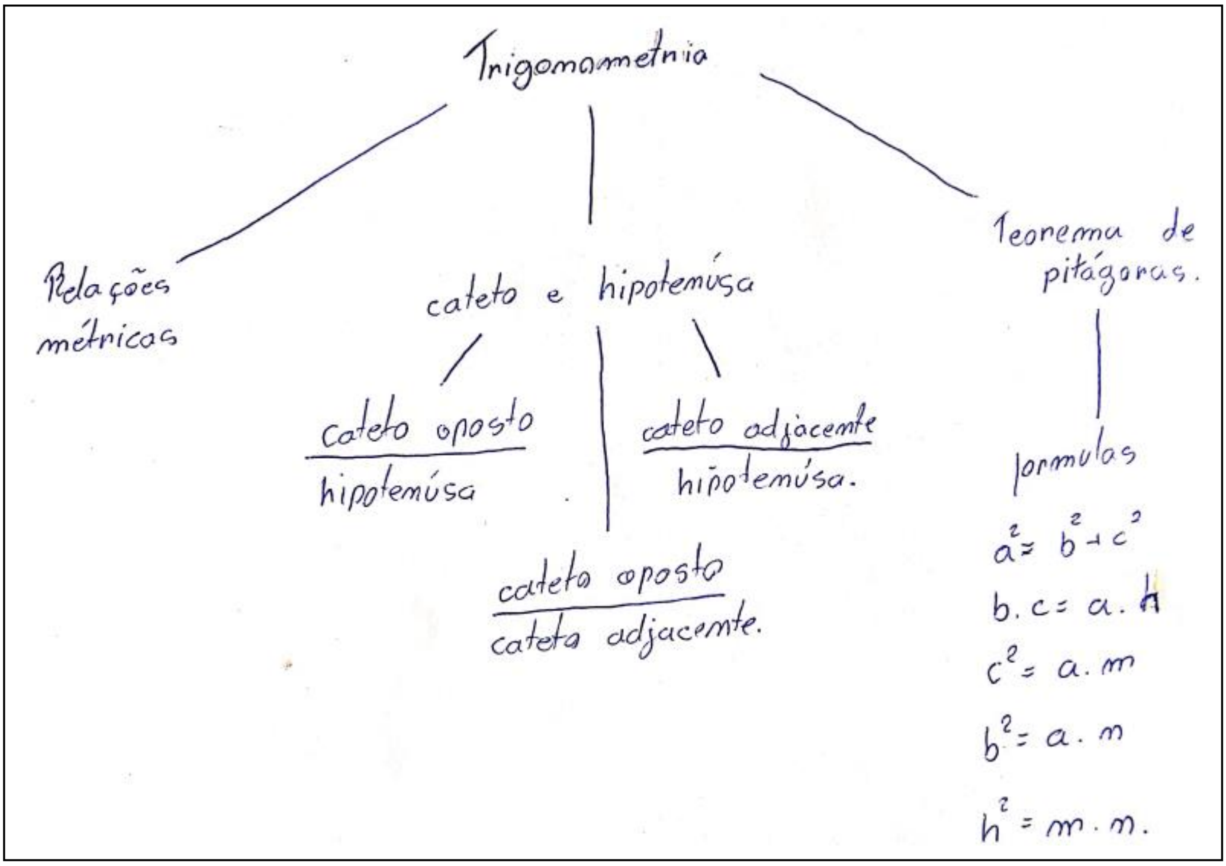
Para a elaboração desse mapa, que se constituiu em fonte rica e inquestionável de conhecimentos dos alunos, partimos dos princípios ausubelianos (Ausubel, 1980) de *diferenciação progressiva*, em que os alunos devem aprender um conteúdo inicial (conceitos e ideias) e, a partir desse conteúdo, associando progressivamente o novo conteúdo, fazer a distinção (*diferenciação*) entre esses conceitos. Também partimos da *reconciliação integradora*, em que os conceitos originais buscam associações (*reconciliadoras*) entre si, interligando-se de forma expansiva e sistemática. Uma das construções de cunho manual (papel e lápis) e individual pode ser constatada a partir do exemplo apresentado na Figura 15.

Figura 15 – Encadeamento de conceitos pelo A6

Fonte: o autor, 2019.

A construção demonstra a visão inicial do aluno acerca do encadeamento da temática, com destaque para: *trigonometria, triângulo retângulo, ângulo reto, semelhança de triângulo, teorema de Tales, relações métricas, teorema de Pitágoras e as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente)*. A forma como hierarquizou os conceitos nos deu ideia do quanto a contextualização oral foi relevante para clarear e organizar seu conhecimento. Vale ressaltar que, durante a exposição oral, que antecedeu a construção do mapa, foi sugerido aos alunos que listassem palavras que representassem conceitos importantes para eles e que poderiam ser utilizadas na confecção dos mapas conceituais. Após esta listagem, pedimos que enumerassem de forma hierárquica, a partir dos mais inclusivos, até que fossem todos ordenados, utilizando assim o princípio da *diferenciação progressiva* para organizar uma sequência hierárquica, conforme Figura 16 a seguir.

Figura 16 – Mapa inicialmente construído pelo A17



Fonte: o autor, 2019.

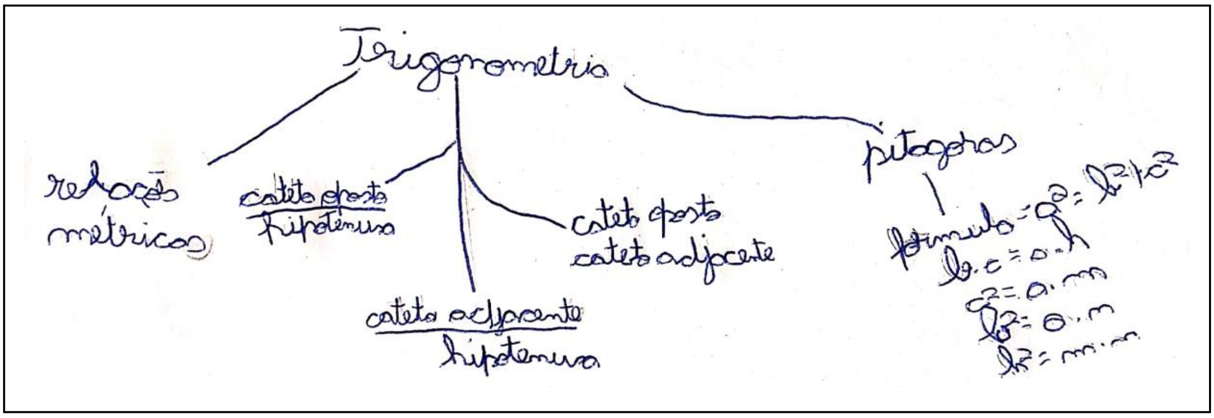
A simplicidade do mapa elaborado pelo aluno e a ausência de ligações cruzadas podem ser justificadas pela falta de familiaridade dos aprendizes com a ferramenta e até mesmo pela interpretação de estruturação que assimilaram das falas do pesquisador. No entanto, destacamos que o mapa apresenta itens positivos do ponto de vista hierárquico e focal do conteúdo. Nesse sentido, o produto final dessa atividade de elaboração de mapas antes da instrução foi um bom ponto de referência conceitual a partir do qual os estudantes puderam construir significados mais ricos. A elaboração dos instrumentos teve também a função de ilustrar como os alunos estavam percebendo o encadeamento conceitual do conteúdo a partir do primeiro contato com a abordagem do pesquisador.

Para a análise dos conhecimentos prévios dos alunos a partir do mapa conceitual inicial, tomamos como referência três critérios: a *frequência* com que os conceitos aparecem (maior inclusão); a classificação em níveis hierárquicos (subordinação); as relações válidas entre os conceitos. Reiteramos que, durante a fase inicial, a construção do mapa pelos alunos ocorreu individualmente, de forma manual, usando lápis e papel.

Como já reportado anteriormente, inicialmente, procuramos identificar a frequência com que os conceitos mais inclusivos apareceram no mapa conceitual inicial. Nesse sentido, organizamos de maneira decrescente a regularidade desses conceitos, considerando a ordem: *triângulo, relações métricas, triângulo retângulo, teorema de Pitágoras, cateto oposto, cateto adjacente, hipotenusa, ângulo de 90º, semelhança de triângulos, fórmula, seno, cosseno, tangente, teorema de Tales, altura e regra de três.* A frequência, níveis hierárquicos e relações válidas dos conceitos são visualizados e representados, a partir das figuras ilustrativas dos mapas conceituais apresentados a seguir, os quais confirmam a presença de conhecimentos prévios já elencados quando da aplicação do teste de conhecimentos, assim como outros que emergiram no percurso da construção.

Os mapas, nessa primeira etapa, acordando com a proposição da tese de utilização de recursos de ensino diversificados durante a intervenção, foram manuscritos. Posteriormente, foram escaneados e arquivados como uma das fontes de informação para esse pesquisador, conforme, Figuras 17, 18, 19 e 20, apresentadas a seguir.

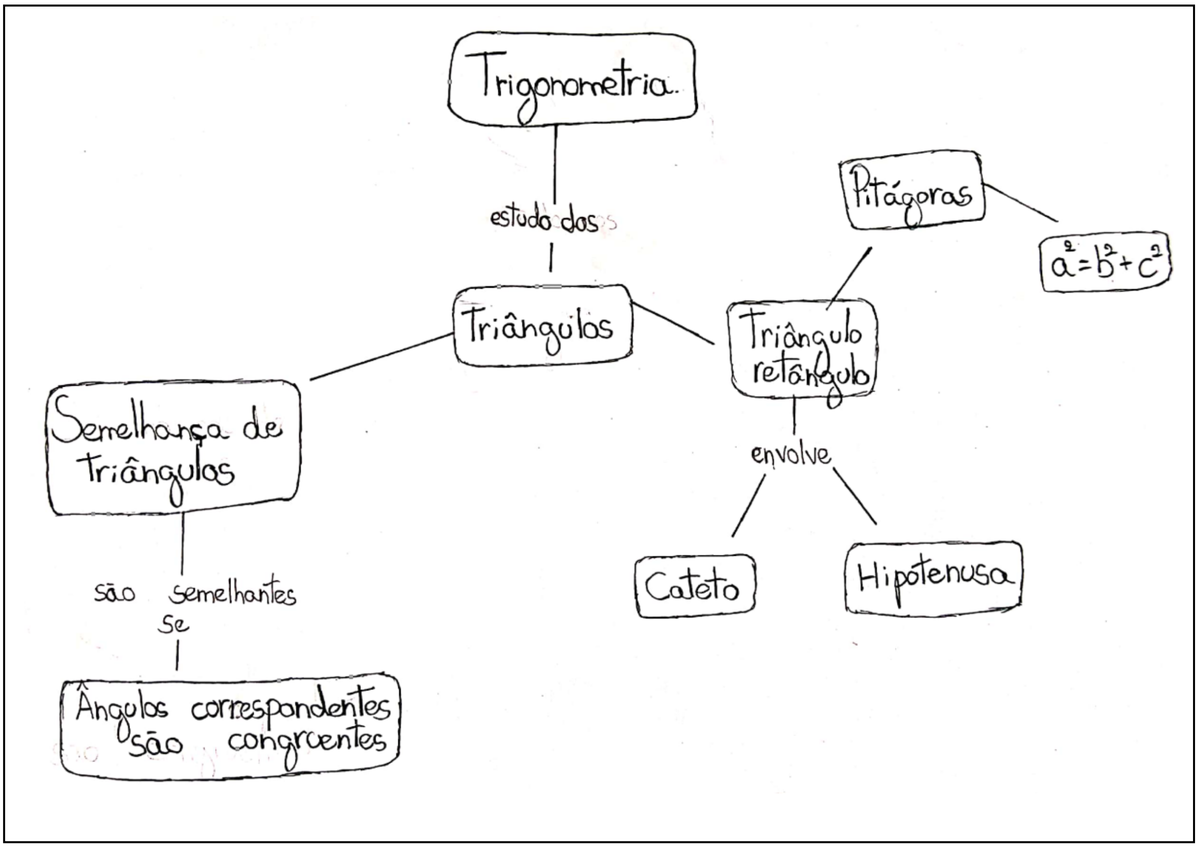
Figura 17 – Primeiro mapa conceitual construído pelo aluno A2



Fonte: o autor, 2019.

Cada participante da pesquisa construiu seu próprio mapa conceitual, nos quais procuramos identificar a frequência, os níveis hierárquicos e as relações válidas entre os conceitos. Na Figura 17, em destaque, observamos que os conceitos atrelados à trigonometria, na verdade, são conceitos subordinados ao de triângulo retângulo, evidenciando incoerências hierárquicas, que foram corrigidas na aplicação da *sequência didática*, quando trabalhamos incisivamente o processo de hierarquização baseado nos conceitos de *diferenciação progressiva* e de *reconciliação integradora.* Também é relevante observar que o mapa apresenta poucas ramificações e distorções entre as relações; porém, não foi uma generalidade, conforme apresentamos a seguir, na Figura 18.

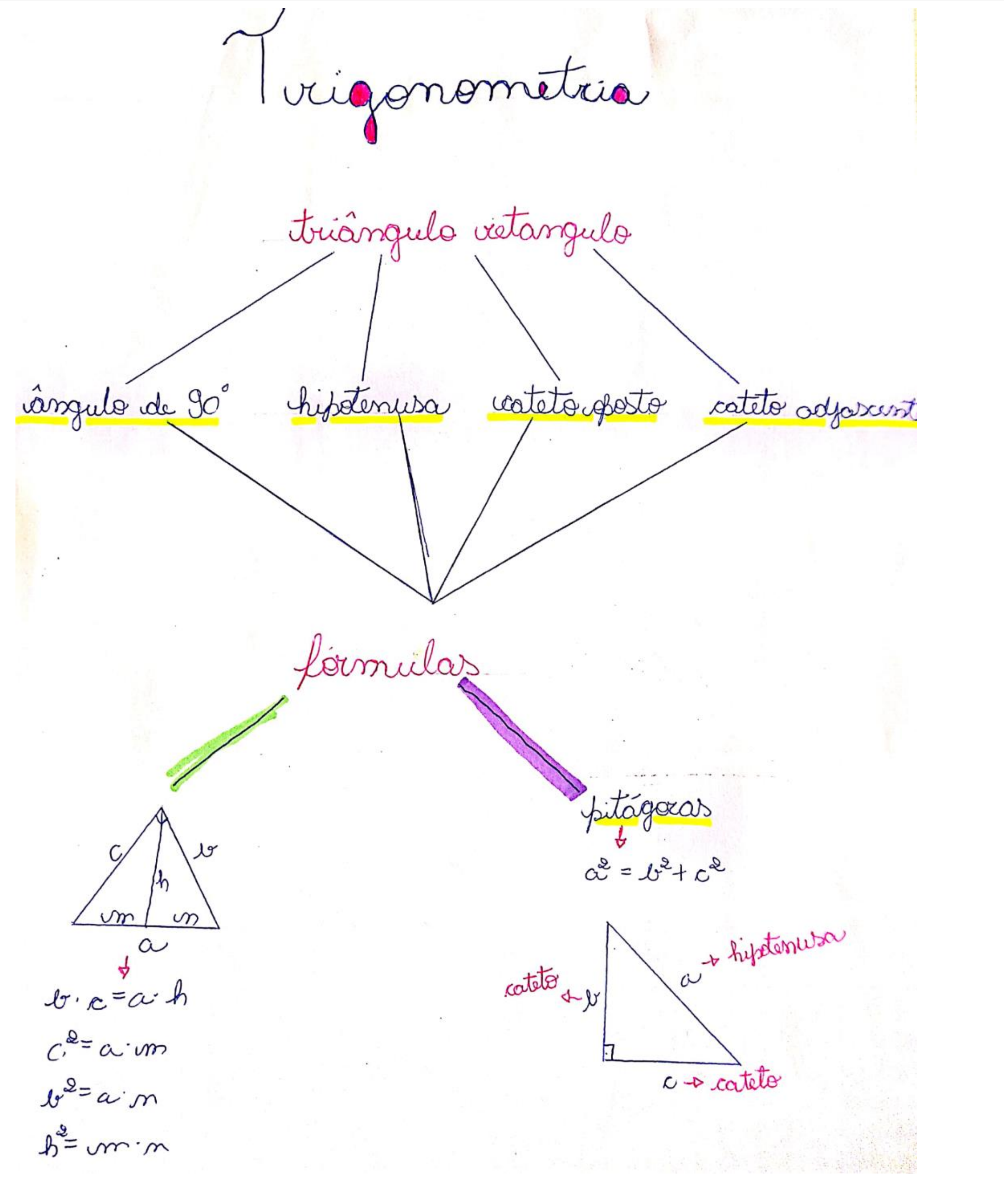
Figura 18 – Primeiro mapa conceitual construído pelo aluno A8



Fonte: o autor, 2019.

No mapa de A8, evidenciamos uma boa articulação entre níveis hierárquicos e relações válidas entre os conceitos. A partir da análise das relações, buscamos enumerar os tópicos mais abrangentes suscitados na elaboração dos mapas, os quais serviram como auxiliares no desenvolvimento da *sequência didática* proposta. Além de A8, outros alunos apresentaram estruturas organizacionais semelhantes, conforme apresentado na Figura 19 a seguir. Nesse sentido, as construções dos aprendizes contribuíram para o delineamento das atividades investigativas posteriores.

Figura 19 – Primeiro mapa conceitual construído pelo aluno A15

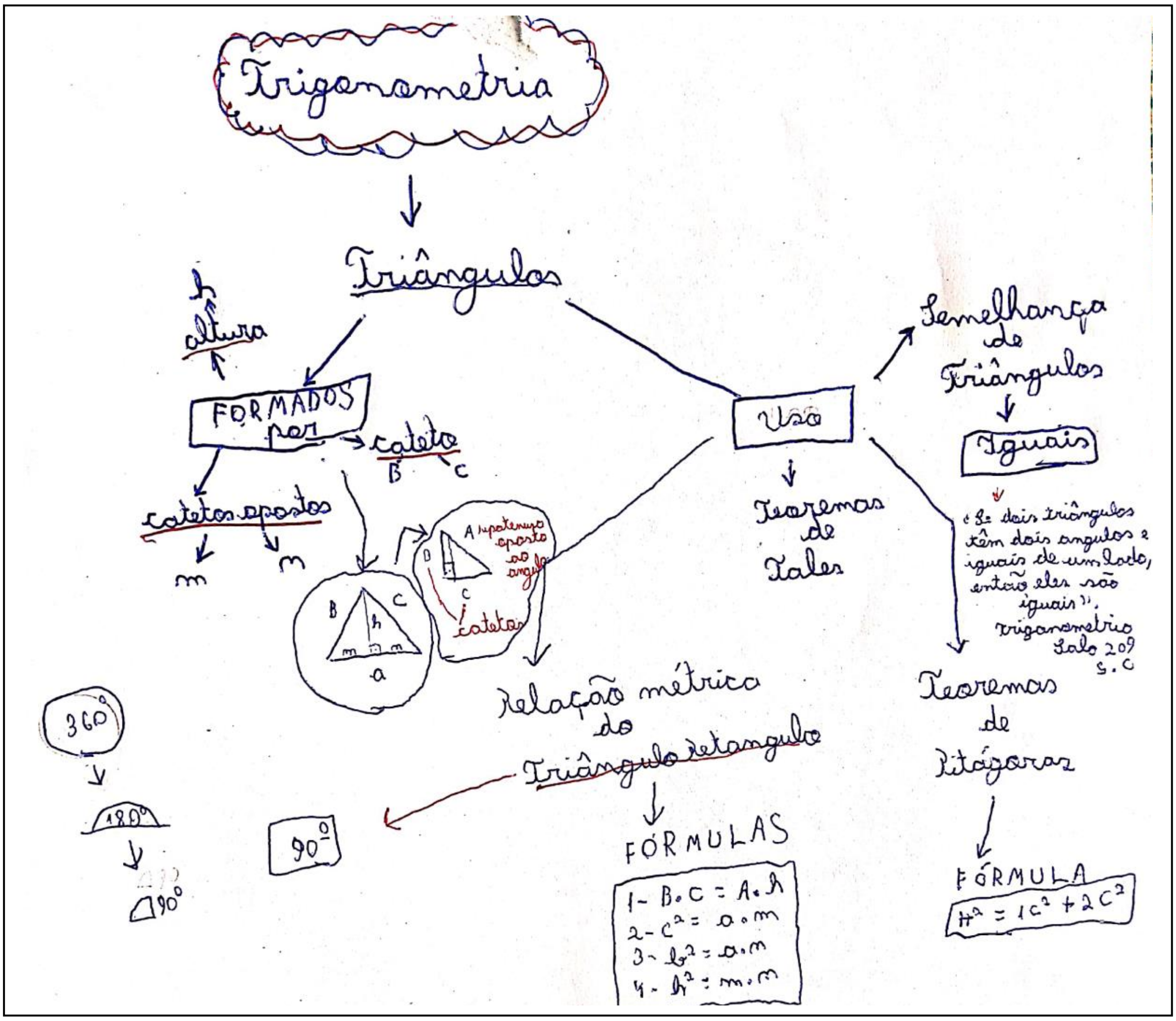


Fonte: o autor, 2019.

No mapa de A15, destacamos como diferencial, a forma como o mapa foi construído. O autor procurou aliar conceitos escritos com sentenças matemáticas, com a finalidade de justificar como estava enxergando o encadeamento do conteúdo, revelando ao pesquisador a força de uma aprendizagem memorística, ainda baseada em fórmulas. Quanto à observação, esclarecemos que não queremos dizer que as fórmulas não possam ser usadas nos mapas conceituais; pelo contrário, elas enriquecem a abordagem; porém, naquele momento, ainda não tinham sido construídas.

Nesse sentido, enfatizamos que o professor que deseje trabalhar com essa ferramenta, mesmo munido dos objetivos a serem alcançados, deve estar preparado para lidar com as diferentes maneiras de os alunos pensarem e organizarem seus conhecimentos. A complexidade da organização dos pensamentos, que, às vezes, os aprendizes não conseguem expressar verbalmente, pode ser constatada a partir de mapas como o da Figura 20 a seguir.

Figura 20 – Primeiro mapa conceitual construído pelo A26



Fonte: o autor, 2019.

Mapas com desenhos, fórmulas e definição de conceitos (FIGURA 19), que "permitem construir leituras com significado lógico e proposicional" (MOREIRA, 1980), auxiliam o docente no entendimento das relações entre conceitos estabelecidos pelo aprendiz. Observamos no mapa construído por A26, uma quantidade satisfatória de informações, acerca do tema estipulado como: organização hierárquica, encadeamento de conceitos, *diferenciação* da ordem dos conceitos e *reconciliação* dos mesmos.

No conjunto da obra, após analisar os mapas das Figuras 16, 17, 18, 19 e 20, observamos que as confecções das estruturas apresentam poucos níveis hierárquicos; porém, os alunos estabeleceram de maneira eficaz as relações possíveis entre os conceitos que conseguiram elencar (trigonometria, triângulo, semelhança, relações métricas, razões trigonométricas,...), demonstrando uma quantidade considerável de conhecimentos prévios. Ademais, apropriaram-se de palavras, desenhos e sentenças matemáticas, para demonstrar o que haviam internalizado acerca do assunto.

Nesse sentido, ao tratar da organização do conhecimento matemático por meio da história da evolução do conceito de trigonometria articulada à construção de mapas conceituais, evidenciamos algumas especificidades que requerem a atenção tanto do professor como do aluno. Entre elas, destacamos a valorização de termos não conceituais nos mapas, que, de maneira semelhante aos conceitos superordenados, sustentam uma síntese de ideias, gerando diversas outras.

Ressaltamos ainda que, no momento inicial, um aprendiz não tem muita clareza acerca de quais conceitos são relevantes para determinado tema, bem como, quais as relações entre esses conceitos. Porém, o uso do instrumento para levantar indícios de conhecimentos prévios dos alunos acerca do assunto foi valoroso dentro do contexto da pesquisa, uma vez que nos permitiu não apenas identificar os conhecimentos dos alunos, mas também, verificar como esse conhecimento estava organizado em suas estruturas cognitivas. Após análise de como os mapas foram estruturados, foi possível, ainda, organizar as Tabelas 1, 2 e 3, que evidenciam o alcance inicial do conhecimento dos investigados. A seguir, na Tabela 1, apresentamos a frequência com que os conceitos elencados apareceram nos mapas construídos.

Tabela 01 – Conceitos, e respectivas frequências, que aparecem no mapa conceitual inicial

CONCEITOS	Alunos participantes																										
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A25	A26	TOTAL
Trig.																											25
Rel. met.																											15
Triang. ret																											13
Teo. Pit																											20
Cat. op																											15
Cat. adj																											15
Hip.																											15
Âng. 90º																											08
Sem. triâng																											11
Fórm.																											08
Sen.																											09
Cos.																											09
Tg.																											09
Teo. Tales																											04
Altura																											03
Regra de 3																											02

Fonte: o autor, 2019.

Onde se lê na Tabela 01:

Trig. = Trigonometria	**Sem. triâng. =** Semelhança de triângulo
Rel. met. = Relação métrica	**Fórm. =** Fórmulas
Triâng. ret. = Triângulo retângulo	**Sen. =** Seno
Teo. Pit. = Teorema de Pitágoras	**Cos. =** Cosseno
Cat. op. = Cateto oposto	**Tg. =** Tangente
Cat. adj. = Cateto adjacente	**Teo. Tales =** Teorema de Tales
Hip. = Hipotenusa	**Altura =** Altura do triângulo
Ang. 90º = Ângulo de 90º	**Regra de 3 =** Regra de três

A Tabela 1, representativa da frequência com que os conceitos apareceram nos mapas conceituais construídos, apresenta o perfil do que os alunos consideraram importante ao relacionarem conceitos subordinados ao central. Nessa fase, praticamente a totalidade, 25 dos pesquisados evidenciaram que o conceito central, ou seja, de onde partiriam as ramificações, estava relacionado à trigonometria e, a partir dele, estariam relacionados os outros conceitos menos abrangentes, como: triângulo retângulo, relações métricas, hipotenusa, catetos, teorema de Tales, semelhança, altura, teorema de Pitágoras, entre outros.

Dos temas suscitados, o de segunda maior abrangência foi o do teorema de Pitágoras. Supomos que o elevado grau de frequência deve-se, em parte, à popularidade desse teorema no meio acadêmico, ou por já ter sido trabalhado anteriormente na disciplina de Física. Na sequência decrescente, constatamos pelos números expostos na tabela, que aparecem os catetos e a hipotenusa, ambos são termos relacionados ao teorema, para então surgir a relação com o triângulo retângulo. Surpreendentemente, conceitos como o de ângulo e de altura do triângulo apareceram com ínfima frequência, alertando-nos para o reforço da importância desses conceitos nas ações seguintes.

Nesse seguimento, os mapas conceituais construídos favoreceram essa organização, ajudando-nos a ter uma visão mais ampla e integradora do conteúdo e do próprio potencial do mapa, em representar de forma clara, como os conhecimentos prévios dos alunos estavam encadeados. De acordo com Novak e Gowin (1984, p. 31), mapas conceituais consistem em ferramentas que “têm por objetivo representar relações significativas entre conceitos na forma de proposições”. Nessa perspectiva, os mapas foram utilizados como ferramenta para auxiliar na organização e hierarquização dos conceitos relacionados ao conteúdo pelos alunos.

O segundo critério que tomamos como referência foi a classificação em níveis hierárquicos dos conceitos subordinados. O modelo de organização cognitiva proposto por Ausubel (2003) para a aprendizagem e a retenção significativas de materiais potencialmente significativos pressupõe a existência de uma estrutura cognitiva, organizada hierarquicamente em termos de vestígios conceituais e proposicionais altamente inclusivos. De acordo com Ausubel (2003, p. 60), “sob estes estão subsumidos vestígios de conceitos e de proposições menos inclusivos, bem como, características de dados informativos específicos”. Por outras palavras, o princípio organizacional é o da *diferenciação progressiva* de sistemas de vestígios de uma determinada esfera de conhecimentos, partindo de regiões de maior inclusão para as de menor, cada uma delas ligada ao degrau mais acima na hierarquia, através de um processo de subsunção.

Nesta pesquisa, os alunos tiveram, pela primeira vez, a oportunidade de trabalharem com a ferramenta, mapa conceitual. Dado o nível de ensino da aplicação e a não familiaridade com o instrumento, notamos a predominância do nível hierárquico 01, com o avanço de poucos alunos para o nível 02 e de nenhum aluno, para o nível 03, e assim sucessivamente. Essa constatação é corroborada pelos resultados da pesquisa realizada por Ribeiro (2015), com alunos do Ensino Médio e Superior.

Ao longo do processo de análise, identificamos algumas dificuldades (falta de clareza dos níveis hierárquicos, mapas com a mesma organização hierárquica) na construção do mapa, o que supomos ter influenciado a ocorrência de certa simetria em algumas das construções. A falta de algumas relações hierárquicas importantes e a ausência de cruzamentos entre os conceitos também foram observadas. Os números indicativos acerca dos dados levantados podem ser visualizados nos registros da Tabela 2, apresentada a seguir.

Tabela 02 – Classificação dos níveis hierárquicos do mapa conceitual inicial

Nível hierárquico	**Alunos participantes**																										
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A25	A26	TOTAL
Nível 00																											**00**
Nível 01																											**21**
Nível 02																											**05**
Nível 03																											**00**

Fonte: o autor, 2019.

Os números apresentados na Tabela 2 corroboram nossa percepção de que o primeiro mapa construído poderia não representar toda a potencialidade que os alunos demonstraram, por ocasião da contextualização do texto que antecedeu a construção do mapa. Ficou evidente que os alunos tiveram dificuldades de avançar nos níveis hierárquicos. A estagnação no nível 01 já era esperada, pois, em pesquisas realizadas por Tenfen (2011) e Ribeiro (2015), com alunos do Ensino Médio e Superior, mesmo com aqueles que já haviam trabalhado com a ferramenta mapas, eles apresentaram dificuldades, num primeiro momento, de encadear os conceitos mais gerais com os menos abrangentes.

Uma vez que a própria estrutura cognitiva tem tendência a organizar-se em termos hierárquicos, de acordo com Ausubel (2003) e Moreira (2011[a]), no que toca ao nível de abstração, generalidade e inclusão de ideias, a emergência de novos significados proposicionais reflete, de modo geral, uma relação subordinada do novo material a ideias mais subordinantes, existentes na estrutura cognitiva. De acordo com Ausubel (2003), dessa forma, desenvolve-se uma estrutura cognitiva organizada de modo hierárquico, que serve como matriz para a aquisição de mais significados.

Nesse sentido, inferimos que as identificações feitas no decorrer da análise corroboram a resposta do nosso primeiro objetivo específico da pesquisa que foi: *identificar os conhecimentos prévios dos alunos participantes da pesquisa, visando nortear o encadeamento da sequência didática.*

Destacamos que, nesse trabalho, consideramos como conceito mais inclusivo apresentado no mapa conceitual, aquele que está na primeira linha do mapa e, em seguida, os menos inclusivos, não menos importantes. A partir do diagnóstico dos mapas, moldamos as demais situações, vivenciadas na forma de atividades para os alunos. Na visão de Vergnaud (1994), situação é a combinação de uma multiplicidade de tarefas integradas a um campo conceitual. É nessa multiplicidade de situações que o conhecimento dos alunos é moldado progressivamente.

A diversidade de concepções verificadas por meio da utilização da ferramenta mapa corrobora a importância de conhecer os conhecimentos prévios dos alunos. Nesse sentido, Moreira (2004) adverte que, muitas vezes, a escola desconsidera o conhecimento implícito. É preciso que o professor oportunize situações em que o aluno tenha a chance de manifestar-se e, sobretudo, faça uma análise do desempenho dos alunos nessas situações.

Na mesma linha, Moreira (2004) enfatiza que, em geral, os alunos não são capazes de explicar ou mesmo de expressar em linguagem natural, seus teoremas e conceitos em ação. Para o autor, na abordagem de uma situação, os dados a serem trabalhados e a sequência de cálculos a serem feitos dependem de teoremas em ação e da identificação de diferentes tipos de elementos pertinentes. A maioria desses conceitos e teoremas em ação permanecem totalmente implícitos, mas eles também podem ser explícitos ou se tornarem explícitos. Neste contexto, o compromisso relevante do ensino: ajudar o aluno a construir conceitos e teoremas explícitos e cientificamente aceitos, a partir do conhecimento implícito (MOREIRA, 2004).

Dessa forma, corroborando o refinamento dos conhecimentos prévios dos alunos, apresentamos, na Tabela 3, a quantidade de relações válidas, ou seja, aquelas em que há uma relação de dependência hierárquica entre conceitos, identificadas nos mapas conceituais que foram entregues ao interventor. Como nas Tabelas anteriores, na Tabela 3, também denominamos os alunos por A1, A2,..., A26. Na mesma linha, explicitamos que os valores numéricos atribuídos às relações têm caráter ilustrativo – demonstrativo.

Tabela 03 – Quantidade de relações válidas entre conceitos no mapa conceitual inicial

Relações válidas entre conceitos	**Alunos participantes**																										
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A25	A26	TOTAL
	2	5	2	2	2	7	9	2	6	6	5	2	7	2	5	3	6	3	3	4	2	4	3	5	3	5	**105**

Fonte: o autor, 2019.

Por meio dos valores apresentados na Tabela 3, constatamos baixo nível de relações válidas entre conceitos mais amplos e os mais subsumidos, porém, tal comprovação já era esperada pelo investigador, dada a falta de familiaridade dos alunos com a construção da ferramenta. Ao analisarmos os mapas, verificamos certa unanimidade na quantidade de relações estabelecida por cada aluno, a citar $A2 = 5; A6 = 7; A8 = 5; A15 = 5; A17 = 6; A26 = 5$. Os números apresentados denotam que entre os alunos, o nível de conhecimento era praticamente uniforme. Em termos avaliativos, consideramos relações hierárquicas válidas, aquelas nas quais os conceitos mais subsumidos têm uma relação de subsunção direta ao conceito mais amplo, a exemplo da relação: $trigonometria \rightarrow triângulo\ retângulo \rightarrow ângulo \rightarrow razões\ trigonométricas$.

De acordo com esse critério, apontamos, na Tabela 3, a quantidade de ligações válidas identificadas nos mapas construídos pelos alunos, entre esses e outros conceitos fundamentais que fazem parte do assunto. É possível que uma das dificuldades dos alunos em apresentar um número maior de relações significativas, mesmo na construção de um primeiro mapa, esteja atrelada às experiências de ensino anteriores com o conteúdo em sala de aula. Segundo Moreira (2003, 2009, 2011[a]) e Novak e Gowin (1984), experiências de ensino anteriores podem influenciar na organização conceitual que o aluno constrói.

Nesse sentido, os mapas conceituais construídos foram um importante instrumento para identificar como estavam estruturadas as concepções prévias dos alunos acerca do conteúdo. Segundo Ausubel (2003), um pré-requisito aparentemente importante para construir organizadores individualizados para unidades de instrução é verificar quais são as ideias preconcebidas mais vulgares dos aprendizes, através de pré-testes, entrevistas clínicas ou *mapas de conceitos* apropriados, para depois combinar, de forma adequada, os organizadores adequados com alunos que apresentam ideias preconcebidas correspondentes.

Observando as respostas do teste de conhecimentos inicial e o desenho do mapa inicial, podemos concluir que os alunos tinham conhecimentos prévios acerca de: *trigonometria, relações métricas no triângulo, triângulo retângulo, ângulo, semelhança de triângulos, teorema de Tales, entre outros.* Conforme diagnosticado nos mapas, os conhecimentos prévios demonstrados se ampliaram e figuraram como ferramentas úteis na condução da *sequência didática* proposta e na reflexão sobre a estrutura do conhecimento desejado, mediante os processos de ensino e de aprendizagem imaginados. Tais conhecimentos, necessários para o andamento da pesquisa, contribuíram, de forma substancial, para a determinação das ações que se seguiram dentro do processo investigativo, bem como, corroboraram a resposta ao nosso primeiro objetivo específico.

A partir dos conhecimentos prévios elencados, na Categoria 4.1.2, passamos a analisar a conjuntura da *sequência didática* elaborada para o ensino das *razões trigonométricas no triângulo retângulo.* Com a análise da categoria supracitada, almejamos responder ao nosso objetivo geral e ao nosso segundo objetivo específico, de acordo com a discussão apresentada a seguir.

4.1.2 Recursos de ensino variados

Nessa Categoria, retratamos e analisamos a experiência de ensino com a utilização da *sequência didática* acerca das *razões trigonométricas no triângulo retângulo*. O assunto encontra-se dentro de um campo maior da Matemática, denominado de Trigonometria. Em nossa análise, explicitamos os variados recursos de ensino utilizados e as diferentes estratégias. Como subsídio à resposta ao objetivo geral da pesquisa, destacamos algumas características que fizeram dessa *sequência didática* um material instrucional potencialmente significativo para o desenvolvimento do assunto. Na mesma linha, levantamos informações que nos permitem responder ao nosso segundo objetivo específico.

Na busca por indicativos, Leite (2013) destaca que pensar no aprendizado matemático nas salas de aulas do Brasil é pensar nas diversas limitações que professores enfrentam na tentativa de estimular os alunos a romperem dificuldades e a desenvolverem habilidades, ainda que o ambiente escolar seja propício para a realização de um trabalho diferenciado. Para Ocanha (2016, p. 23), “educar é a principal função da escola, mas as variações do modo de ensinar dos professores determinam diferenças nos resultados obtidos”.

Na Matemática, por exemplo, para minimizar esse problema, alguns autores sugerem novas formas de ensiná-la, pautadas, principalmente, nas atividades em grupo, reconhecendo a importância da interação na construção do conhecimento. Nesse sentido, buscar práticas alternativas para a solução dessas situações desafiadoras contribuiu para o desenvolvimento de uma *sequência didática* que instigasse o interesse dos alunos, por meio de diferentes formas de problematizar o conteúdo, *razões trigonométricas no triângulo retângulo*.

Se atentarmos para a Matemática como um todo, podemos observar que os conteúdos podem ser apresentados de diferentes maneiras, como já foi mencionado. Tais maneiras são basicamente determinadas pelos professores. Assim, nesta proposta, procuramos aproximar a Matemática institucionalizada da Matemática da vida e vice-versa, levando os alunos à construção dos conceitos trabalhados e à apropriação do conhecimento de forma pessoal e significativa, por meio de uma série de recursos de ensino diversificados.

A partir da análise dos conhecimentos prévios dos alunos, tomando como referencial os depoimentos, a nossa experiência enquanto educador, como também o já preconizado pela literatura, iniciamos a *sequência didática* com a *leitura de um texto* intitulado *"Voltando ao passado para compreender o presente da Trigonometria"* (ANEXO A). A nossa intenção foi contextualizar a evolução histórica das noções de trigonometria, procurando dar encaminhamentos acerca da utilidade do conteúdo, quando abordado no ensino das *razões trigonométricas no triângulo retângulo*, enfatizando assim a primeira dimensão das análises preliminares, *a dimensão epistemológica*, preconizada por Artigue (1996).

Na concepção de Ausubel et. al. (1980), a história da trigonometria pode ser considerada como um organizador prévio avançado, um elemento motivador, que serve de ponte entre aquilo que o aluno já sabe e o que ele virá a aprender. Como já mencionado, o recurso elencado para o início da aplicação da *sequência didática* foi um *texto*. Para explorar a proposta e envolver os alunos na tarefa, recorremos à *leitura compartilhada*.

Nos intervalos da leitura, os alunos eram instigados a opinar acerca do que estavam lendo. Vocês sabem o que estuda a trigonometria? Conhecem alguma aplicação histórica desse conteúdo? Onde podemos observar aplicações da trigonometria no nosso cotidiano? As perguntas lançadas tinham o objetivo de incentivar o aluno a estabelecer relações, analisando o seu próprio conhecimento e levando-os a avançar para formas superiores de pensamento. No final do encontro, propôs-se que pesquisassem o tema em livros, ou na *internet*, se assim o preferissem, o que nos permitiu retomar, no encontro seguinte, por meio de *roda de conversa*, a discussão de aprofundamento epistemológico, continuando assim as proposições da *sequência didática*.

Ressaltamos que, naquele momento, vários questionamentos surgiram por parte dos alunos, o que nos levou a lançar mão de um novo organizador avançado (apresentação de um quadro evolutivo do conceito de trigonometria auxiliado por um *projetor multimídia*) para sintetizar a discussão. Ausubel (2003) recomenda o uso do dispositivo sempre que o mediador precisa apresentar aos alunos aquilo que realmente deve ser aprendido.

A proposta teve boa receptividade por parte dos alunos que demonstraram interesse em querer saber mais acerca da história da trigonometria e suas principais aplicabilidades. Os questionamentos observados corroboram as percepções de Santos (2017), que salienta na pesquisa, que, nesse nível de ensino em particular, observa-se a preocupação dos alunos em quererem saber sobre a origem desse conhecimento e como os povos o aplicavam em situações práticas do dia a dia.

Dando continuidade à proposta, lançamos mão da aula *expositiva dialogada,* para conduzir os alunos, por meio de seus conhecimentos prévios, na construção do conceito de *paralelismo* e, progressivamente, incorporar a seus conhecimentos as proposições do *teorema de Tales*. O intuito foi que, após a intervenção, tivessem clareza quanto ao conceito indutivo de *proporcionalidade*.

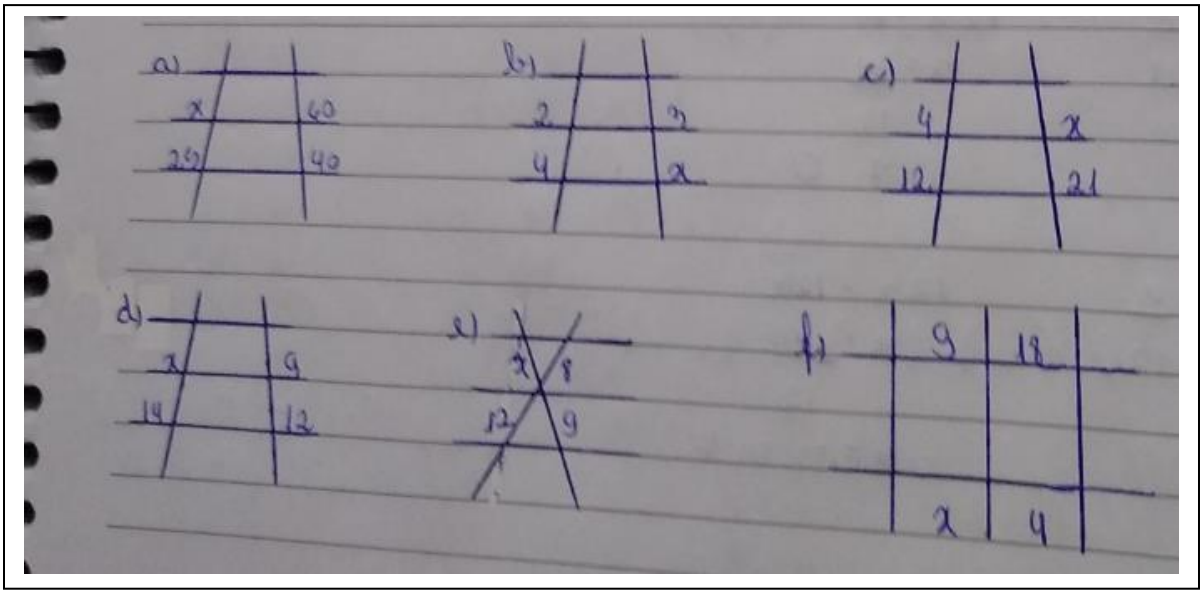
Ausubel (2000, 2003), Moreira (1999, 2005, 2011[b]) e Moreira e Masini (2011) recomendam que, a cada etapa a ser avançada no material instrucional, seja feita uma ponte entre o conhecimento anterior, potencialmente adquirido, e os novos conhecimentos a serem apresentados. Nesse sentido, nos portamos como um elo entre a discussão passada e a nova que foi projetada. Tal postura nos possibilitou mediar a construção do saber dos alunos por meio de passos didáticos coerentes que os levaram a trilhar um aprendizado gradual e constante, sem interrupções bruscas do conteúdo, entrelaçando os assuntos estudados, para que pudessem incorporar os conceitos de forma adequada.

Segundo Leite (2013), qualquer ruptura dessa relação, que é mediada pelo professor, potencializa o fracasso do aprendizado. Dessa forma, o papel do professor é estrutural, sendo possível uma atuação inadequada na condução dos conteúdos, o que gera desconforto e insegurança das partes envolvidas, na construção do saber matemático. Na intenção de mediar o constructo do conhecimento dos alunos, retomamos a fala acerca do *paralelismo* seguindo questionamentos explicitados na *sequência didática* (APÊNDICE F). A condução das atividades da construção conceitual foi pautada pela interação constante entre interventor e pesquisados, partindo de questionamentos básicos como: O que são retas paralelas? O que são retas transversais?

A partir das respostas dos alunos para retas paralelas, a exemplo: *são duas retas que não se tocam; são duas retas que caminham juntas na mesma direção;* e para retas transversais: *são retas que se cruzam; são retas que formam ângulos agudos,* refinamos, no *quadro branco,* os conceitos de maneira a atingir o nosso objetivo, que foi apresentar, a partir das informações dos alunos, as propriedades descobertas por Tales. Apesar do cuidado no prosseguimento do assunto, alguns alunos tiveram dificuldade em compreender a demonstração, o que foi verificado ao solicitarmos que criassem um modelo numérico para a comprovação aritmética das propriedades do teorema.

Coube, então, ao interventor reavaliar o nível de aprendizado até então demonstrado pelos alunos e adaptar os exercícios propostos a um nível em que todos eles pudessem mobilizar o que tinham assimilado até então. As atividades foram desenvolvidas utilizando *papel e lápis* e, posteriormente, resolvidas pelos alunos no *quadro branco*. A seguir, apresentamos, na Figura 21, as questões que precederam as atividades propostas na *sequência didática*.

Figura 21 – Exercícios envolvendo proporcionalidade



Fonte: o autor, 2019.

Os conceitos suscitados a partir do desenvolvimento das atividades complementares e também da resolução das situações-problema propostas na *sequência didática* configuram-se como importantes *subsunçores* para o encadeamento do estudo de *semelhança de triângulo retângulo*. Para a resolução dos problemas da *sequência didática,* os estudantes deveriam utilizar as propriedades do teorema de Tales. E, para o reconhecimento do teorema de Tales, deveriam verificar a presença de retas paralelas e de retas transversais. A proposição das situações favoreceu os alunos no sentido de recordarem que duas retas são perpendiculares quando o ângulo formado entre elas mede 90º, bem como, suscitarem os conceitos de retas paralelas e transversais.

Convicto dos subsunçores dos alunos, prosseguimos na intervenção, tendo em vista a utilização dos seus conhecimentos para a construção do conceito de semelhança de triângulo retângulo. Para que a construção fosse significativa, incluímos, inicialmente, uma atividade de caráter exploratório para estimular a participação dos alunos, buscando levar em conta os princípios da *atividade compartilhada* (atividades em grupo que favorecem a socialização e a aprendizagem). Segundo Mascarin (2017), as atividades exploratórias estimulam os alunos a levantarem hipóteses e a fazerem breves conjecturas acerca de uma situação proposta.

Assim, aos 26 estudantes participantes da pesquisa, divididos em 8 grupos, foi distribuído *papel cartão*, *régua, tesoura* e *compasso*. Com a utilização desses materiais concretos, intuímos envolver os alunos numa atmosfera diferente da de experiências anteriores e assim motivá-los a participarem ainda mais nos processos de ensino e de aprendizagem propostos.

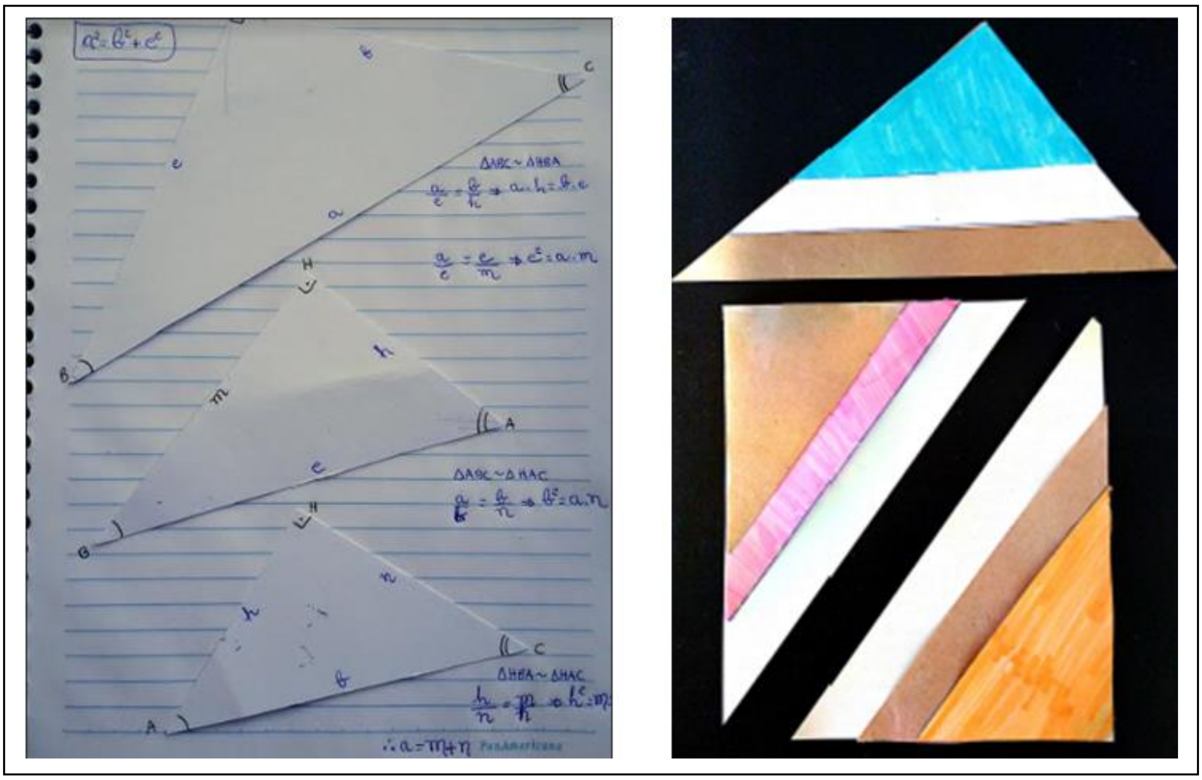
Estávamos cientes das dificuldades que os alunos encontrariam na descoberta de conceito, que, na maioria das vezes, é apresentado por meio de sentenças ou fórmulas diretas, sem que os estudantes entendam o que de fato significam e como surgiram. A nossa proposta seguiu o fluxo contrário. Na atividade, os estudantes foram levados a verificar o conceito de semelhança, utilizando triângulos construídos por eles mesmos.

Após as orientações acerca do que se pretendia com a atividade exploratória, solicitou-se que os alunos desenhassem, com *régua* e compasso, dois triângulos com medidas idênticas. As dimensões foram determinadas pelo pesquisador: 12 cm, 16 cm e 20 cm. Como os alunos tiveram dificuldades no alinhamento dos vértices do triângulo a partir das medidas fornecidas, alguns minutos depois, foi necessária a intervenção do pesquisador.

Naquele momento, foram orientados a utilizar a régua para fazer um segmento de reta de 20 cm em cada uma das duas folhas fornecidas. Em seguida, sugerimos que usassem a escala da régua para medir uma abertura de 16 cm no compasso e, posteriormente, que fixassem a ponta seca na extremidade do segmento de 20 cm, marcando com um traço os 16 cm; em seguida, foram orientados a repetir o procedimento para os 12 cm, colocando a ponta seca na outra extremidade e marcar sobre o traço de 16 cm, formando assim um dos vértices do triângulo. Terminada a etapa, um dos triângulos foi preservado e o outro foi recortado, sendo dividido em 2 triângulos menores, com um recorte na altura, em relação à hipotenusa (obtida pela própria dobradura, pelo vértice do ângulo reto e a base na hipotenusa). Esperávamos assim alcançar a aprendizagem significativa dos estudantes, partindo do que já conheciam: os triângulos.

Após o reconhecimento de que se tratava de triângulos retângulos, foi solicitado que os três triângulos fossem colocados na mesma posição relativa ao ângulo reto e, em seguida, que encaixassem os ângulos, sobrepondo os recortes de papel, para verificar se tinham a mesma medida. Após a verificação, os alunos concluíram que eram triângulos semelhantes, pelo caso *AAA*[15] e, com a mesma posição relativa, foram escrevendo as razões e proporções encontradas, por lados homólogos, com a mediação de perguntas feitas pelo interventor, conforme Figura 22 (desenho de um aluno).

Figura 22 – Dedução das relações métricas no triângulo retângulo



Fonte: o autor, 2019.

A utilização de triângulos semelhantes, confeccionados em material de fácil manuseio, foi uma forma de estimulá-los a utilizarem os conhecimentos anteriores por meio de ações concretas, como medir ângulos, utilizando o transferidor e medir os lados utilizando a régua, realizando aproximações, sempre que necessário. Outro aspecto que a situação procurou privilegiar foi o trabalho em grupo, pois Vergnaud (1994) acredita que a interação social tem papel importante na formação de um conceito.

[15] AAA – corresponde à relação ângulo, ângulo, ângulo.

Todos os componentes dos grupos participaram ativamente do processo de construção, demonstrando satisfação e empenho na realização da atividade. Para a fixação do tema em estudo, posteriormente, foram feitos exercícios que exploraram com maior profundidade o conhecimento ancorado na estrutura cognitiva dos alunos. De acordo com Jonassen (2007) e Moreira (2009 e 2011[a]), não há mais espaço, no ambiente escolar, para o mero transmissor e comunicador de conteúdos. O professor deve acompanhar o desenvolvimento de todas as atividades. Como auxiliador, deve conduzir, guiar seus estudantes, mas quem deve chegar ao final do caminho são os próprios estudantes, que devem trabalhar ativamente na realização das atividades, adquirindo novos conhecimentos e sendo sempre mediados pelo professor. Na Figura 23, observamos os alunos realizando as atividades propostas.

Figura 23 - Atividade desenvolvida em sala de aula

Fonte: o autor, 2019.

Ao fim da atividade, consideramos relevante discutir com os alunos alguns aspectos pertinentes aos registros que observaram, permitindo que eles expusessem suas ideias e suas conclusões acerca das principais características e propriedades da semelhança do triângulo. Baseados na atividade exploratória, os alunos inferiram que os segmentos de reta formados sobre retas transversais a um feixe de retas paralelas são proporcionais.

Possivelmente, com a realização das atividades, os *subsunçores* anteriores foram mobilizados, pois as respostas dos alunos surgiram naturalmente. Ao interventor coube fazer a ponte entre as propriedades do teorema de Tales e as principais características de semelhança, antes de prosseguir com as atividades.

Ciente de que os alunos compreenderam que a possibilidade de interação dos conceitos até então trabalhados no triângulo se ampliam quando se conhece a medida de seus ângulos e a medida de um de seus lados, incentivamos os estudantes a fazerem os mesmos triângulos, porém com dobradura (APÊNDICE F), para consolidar o conhecimento adquirido. Ausubel et. al. (1980) preconizam que a repetição de procedimentos é importante no processo de aprendizagem significativa. Vergnaud (1994) corrobora, acrescentando o argumento de que a proposta de situações variadas favorece a conceitualização.

A forma como os alunos se apropriaram e encadearam os conceitos fez-nos presumir que o uso dos recursos de ensino utilizados teria influenciado de forma direta os resultados ali comprovados, pois caminharam no sentido oposto a pesquisas realizadas anteriormente, por outros pesquisadores, em relação a esse assunto, no mesmo nível de ensino dos pesquisados. Nesse sentido, destacamos que, em pesquisa realizada, Leite (2013) constatou grande dificuldade entre os 189 alunos pesquisados, em construírem o conceito de semelhança a partir do estudo do teorema de Tales, por meio de explicação no quadro branco; porém, ressalta que tal fato pode ser justificado pela dificuldade dos professores na condução do ensino de base da Geometria. Silva (2015) assevera que o estudo da Geometria nas salas de aula do Brasil é renegado pelos professores, o que se reflete na qualidade do conhecimento dos alunos na hora de formularem suas próprias hipóteses. Segundo a autora, os poucos docentes que se arriscam nesse campo, dada sua formação precária na Área, utilizam uma metodologia tradicional, com resolução excessiva de exercícios, sem a aplicabilidade do conteúdo no dia a dia do aluno, o que não motiva os alunos, diminuindo assim seu interesse em aprender.

Silva (2015) também enfatiza que a má fama do estudo dos entes geométricos se deve à abordagem superficial e mecânica realizada pela escola, pois falta formação aos docentes para aprofundar os aspectos mais relevantes, que possibilitam considerar os conhecimentos anteriores dos alunos, as situações didáticas e os novos saberes a construir. Conclui suas observações relatando que é inútil esperar que o aluno, por iniciativa própria, queira aprender algo que não lhe seja útil, porque seu cérebro ainda não amadureceu o suficiente. Por não saber aplicar o que aprendeu, surge a sensação de inutilidade do que deve ser aprendido.

A fim de auxiliar os alunos na busca de aplicações práticas do conteúdo e avançar nas discussões de encaminhamentos da construção das *razões trigonométricas no triângulo retângulo*, na Parte II da *sequência didática,* propomos uma *atividade de campo,* baseada na projeção de *sombras* com *varetas* de tamanhos variados. Para desenvolver a atividade, utilizamos *hastes, martelos, trenas, papel e lápis*. A proposição foi necessária, uma vez que era necessário mediar a construção e a incorporação do conceito de *razões trigonométricas no triângulo retângulo* pelos alunos.

Recorrer a atividades práticas, segundo Mascarin (2017), ajuda a dinamizar o assunto trabalhado, além de mudar a ambientação tradicional da sala de aula. Segundo a autora, como os alunos são curiosos por natureza, as atividades de campo proporcionam mais espaço para uma participação ativa, que, de alguma forma, desperta o seu interesse em aprender. Nesse sentido, Meneses (2007) enfatiza que esse espaço é dado através do contato com o objeto de estudo a ser analisado, anotando dados, verificando os fatos e fazendo comentários. Entendemos que, nesta pesquisa, a abordagem nesse formato possibilitou aos alunos a construção de uma aprendizagem com mais significado, por tratar-se de uma experiência que envolveu o meio no qual o aluno estava inserido e, simultaneamente, permitiu um resgate histórico dos métodos/técnicas utilizados por matemáticos da Antiguidade.

Como já descrito, disponibilizamos aos alunos, um conjunto de hastes (varetas) de tamanhos variados. Em grupos, foram convidados a seguir para o pátio do colégio e fixar as varetas de vários comprimentos, verticalmente, no chão. A ação foi seguida de observação e de mensuração das hastes e suas respectivas sombras. Para Moreira (1999), o organizador prévio é qualquer (objeto/ação) que visa facilitar a aprendizagem de um novo conhecimento. No caso, a Figura 22, apresentada a seguir, demonstrativa do procedimento utilizado, foi usada para questionar os alunos acerca dos ângulos que se formaram a partir das projeções.

Nesse sentido, questionamos se, independente do horário, fizéssemos a observação, considerando a projeção dos raios solares, os ângulos formados seriam os mesmos. Responderam que *os tamanhos dos ângulos formados a partir das projeções dependem da altura em que o Sol se encontra*. Após alguns questionamentos por parte do interventor, relacionados ao tamanho das hastes utilizadas e o que significava sua projeção, os alunos chegaram à conclusão de que as varetas e as sombras projetadas estavam relacionadas com os catetos de um triângulo retângulo, conforme observado na Figura 24.

Figura 24 – Mensuração das varetas e respectivas sombras

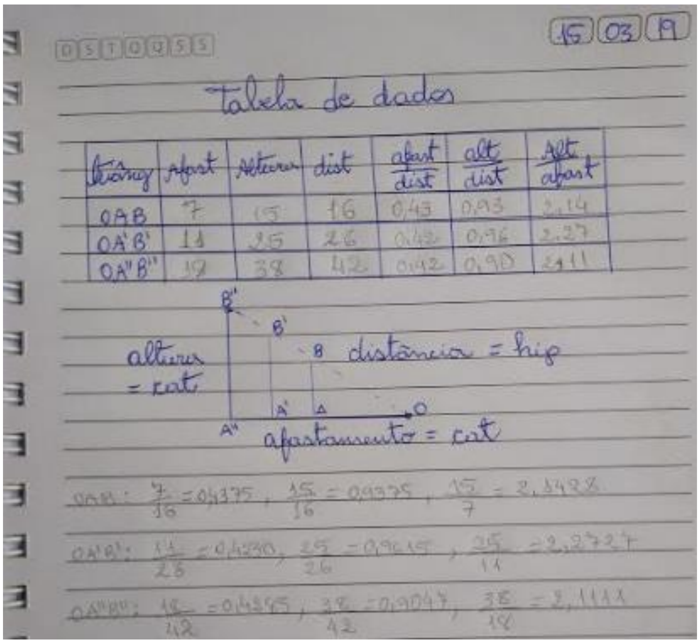
Fonte: o autor, 2019.

Após considerações acerca das hipóteses, alguns alunos relataram que as projeções estavam relacionadas a triângulos semelhantes. Assim que foi verificado que os participantes estavam convencidos da descoberta, solicitamos que construíssem um Quadro em que registrassem as medidas das varetas com suas respectivas sombras.

De acordo com o que havíamos previsto, após analisarem a razão de proporcionalidade existente entre os lados dos triângulos formados pelas hastes e suas respectivas sombras, os alunos concluíram que a altura da haste e a projeção da sombra eram retas perpendiculares; portanto, correspondiam aos catetos de um triângulo retângulo. Também concluíram que, independente do tamanho da vareta e da sua projeção (a atividade foi realizada às 11 h), existia uma constante *(c)* relacionada à razão $\frac{cateto oposto a \propto}{cateto adjacente a \propto}$. No percurso, num processo de unificação das conjecturas formadas a partir da tempestade de ideias, mediamos a interligação entre os fatos observados, até chegarem à conclusão do que denominamos de *tangente* de $\propto$, determinando assim a descoberta da primeira razão trigonométrica.

Na sequência, para concatenar o atual momento com os anteriores e ampliar a visão conceitual de construção do *seno* e do *cosseno*, procuramos explorar todos os achados com o preenchimento do Quadro (APÊNDICE F), conforme Figura 25.

Figura 25 – Preenchimento dos dados coletados



Fonte: o autor, 2019.

Após o preenchimento do Quadro, questionamos aos alunos se percebiam alguma similaridade entre os dados que haviam acabado de trabalhar. Responderam que, tirando pequenas diferenças, os valores encontrados eram muito próximos. Um dos alunos respondeu: *nas colunas praticamente todos os valores são iguais;* na mesma linha, outro respondeu com uma pergunta: *professor, esses valores tão próximos, têm relação com a constante de proporcionalidade*? Outro: *os valores correspondem aos mesmos tamanhos de ângulos para todos os triângulos*. Aproveitando a deixa dos alunos, por meio de questionamentos, auxiliamo-los a reconhecerem que as proporcionalidades estabelecidas em relação aos lados dos triângulos eram as *razões trigonométricas* fundamentais, nomeadamente (*seno, cosseno* e *tangente*). Após confirmada a aquisição dos novos conceitos, propomos algumas atividades, objetivando a retenção significativa do conhecimento.

Passada resolução e a discussão acerca das atividades propostas, momento em que alguns alunos ainda fizeram questionamentos relacionados aos lados do triângulo, aproveitamos a oportunidade para investigar se havia *subsunçores* disponíveis para relacionarem o caso *LAL*[16]. Prosseguindo a investigação, sugerimos a leitura de um *texto* que disponibilizamos, intitulado, *Astrolábio,* apresentado no Anexo B.

Inferimos que a leitura sobre o instrumento favoreceu o encadeamento da atividade subsequente, pois, mesmo os alunos que já tinham ouvido falar acerca da ferramenta, tiveram a oportunidade de manifestarem suas dúvidas relativas à sua utilização, na antiguidade e nos tempos atuais. Para dissecar o texto, foi realizada uma *roda de conversa* com todo o grupo de alunos interagindo. Terminada a contextualização, foi proposto aos alunos a construção de um *Astrolábio* rudimentar.

As orientações cabíveis para a construção do instrumento foram expostas aos alunos, bem como, o material utilizado foi disponibilizado. A confecção do *Astrolábio*, além de envolver os alunos numa conjuntura de manipulação de material concreto, também estimulou sua curiosidade, para a testagem do instrumento na prática. Essa situação tinha como um dos objetivos, a identificação, entre as *razões trigonométricas* estudadas, aquela que seria conveniente para determinar a altura inacessível.

Cientes do propósito da atividade, em grupos, em sala de aula, os alunos começaram a construção da ferramenta, conforme Figura 26. Salientamos que, embora o desenvolvimento da atividade tenha se dado em grupos, cada aluno construiu seu *Astrolábio,* individualmente.

[16] Caso LAL – corresponde a relação lado – ângulo – lado de um triângulo.

Figura 26 – Construção do *Astrolábio*

Fonte: o autor, 2019.

No decorrer da confecção, tomamos como referência os pressupostos da observação participante e um dos princípios da teoria da *Aprendizagem Significativa*. Segundo Ausubel (2000), no processo da aprendizagem significativa, o professor deve elaborar situações de modo que o aprendiz consiga aprender significativamente, ou seja, o interventor (professor) deve conduzir a aula de modo a fazer com que as atividades sejam interessantes do ponto de vista prático, e significativas do ponto de vista cognitivo dos aprendizes.

Terminada a confecção, aludimos à utilização do instrumento e propomos uma atividade em que o *Astrolábio* pôde ser testado ainda em sala de aula, a exemplo: calcular a altura do chão até a parte de cima da lousa. Após a testagem, os alunos foram convidados a se dirigirem à parte externa do colégio e, em duplas, para facilitar o trabalho, deveriam encontrar um objeto alto o suficiente para que precisasse mais que uma simples escada para medi-lo, como, por exemplo: calcular a altura do prédio da escola; a altura dos postes do pátio; a altura do teto da quadra; entre outros, com o uso do *Astrolábio* confeccionado por eles.

Foi interessante ouvir a discussão entre os alunos, pois eles já tinham alguns conhecimentos a respeito das *razões trigonométricas* e agora teriam que definir qual delas utilizar. *Professor é preciso utilizar todas as razões? Porque, veja, se eu preciso me posicionar a certa distância e anotar o ângulo com que vejo o objeto, basta eu calcular a tangente que terei a altura.* E assim, outras colocações se sucederam na mesma linha. Naquele momento estavam "incluindo" a nova situação a ser resolvida, aos conhecimentos anteriores. Suas conjecturas os levaram a ver que, entre as razões estudadas, a razão *tangente* seria a razão conveniente para realizar a tarefa que lhes foi incumbida. A interação social foi importante para a definição dos procedimentos a serem realizados pelas duplas. A explicitação das ideias no grupo mostrou como cada um estava pensando em realizar a situação. Segundo Vergnaud (1994), a situação que promove uma discussão oral favorece a explicitação das ideias.

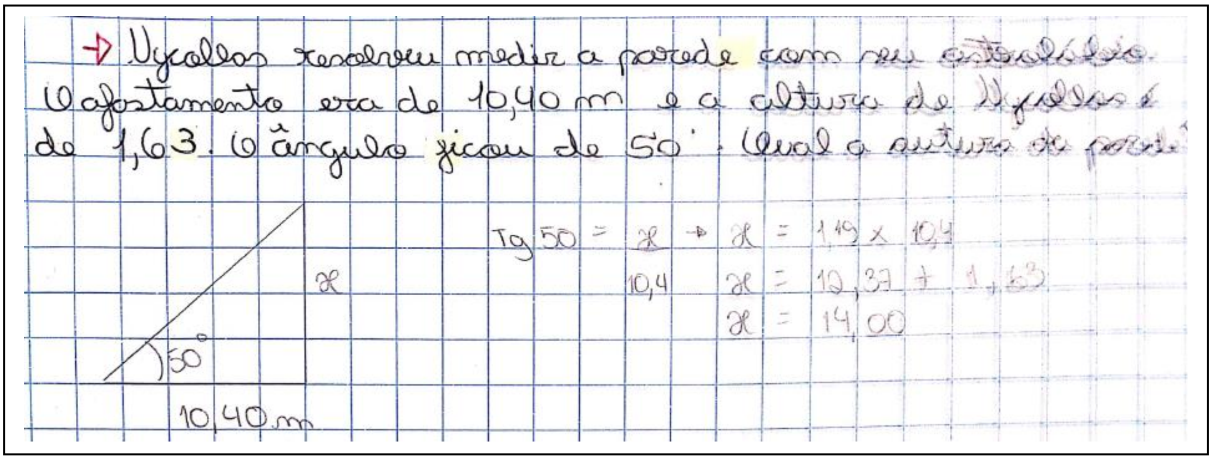
A participação dos alunos durante a coleta dos dados foi muito boa, conforme destacado na Figura 27, o que corroborou a obtenção de resultados próximos do idealizado. Esses discutiram, fizeram medições, anotações e compartilharam informações.

Figura 27 – Atividade externa com o *Astrolábio*

Fonte: o autor, 2019.

Após a comprovação da utilidade prática do *Astrolábio* e da respectiva coleta de dados em campo, conforme exposto na Figura 27, solicitamos aos alunos que elaborassem individualmente ou em dupla, situações-problema a partir de suas experiências e observações feitas na aula exploratória. Tais atividades seriam discutidas e apresentadas soluções de verificação, para comprovação ou não da eficiência do instrumento. Naquele momento, percebemos que o esquema gráfico, utilizado por algumas duplas, foi importante para a interpretação do problema a ser resolvido. A observação acerca da utilização de esquemas gráficos é corroborada pela Figura 28 apresentada a seguir.

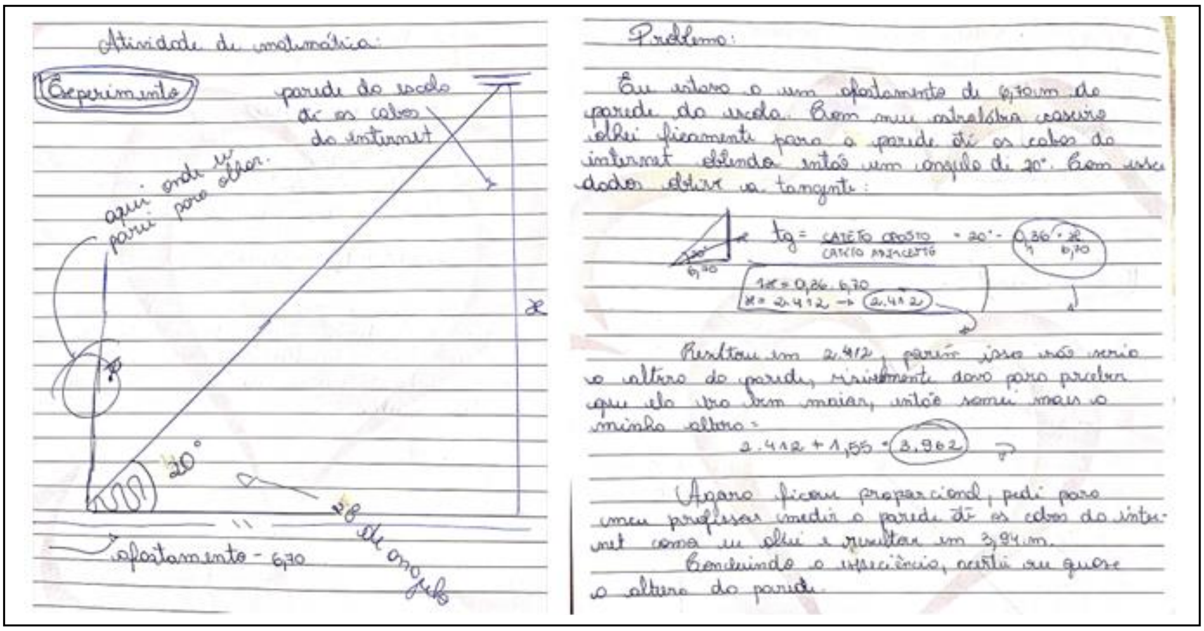
Figura 28 – Esquema de verificação de altura



Fonte: o autor, 2019.

Na mesma linha, outros grupos também apresentaram esquemas interpretativos junto à resolução dos problemas. Foram unânimes em afirmar que o uso do recurso gráfico facilitara o entendimento acerca dos problemas que lhes foram propostos. Ademais, realizaram os cálculos convertendo as interpretações em sentenças matemáticas, conforme os resultados de uma das duplas apresentado na Figura 29, a seguir.

Figura 29 – Situação-problema criada por um grupo de alunos



Fonte: o autor, 2019.

Como podemos perceber na Figura 29, o esquema gráfico também foi utilizado e ajudou-os a interpretar e a representar a situação-problema. A diversidade de expressão explicitada evidencia que a proposição da atividade foi potencialmente significativa para esses alunos. Desde os passos iniciais da atividade, quando os alunos foram levados a campo e questionaram qual das razões trigonométricas deveriam utilizar e optaram pela *tangente*, evidenciamos explicitamente nos encaminhamentos tomados, o processo de *diferenciação progressiva*. Ao observarem e refutarem a utilização das razões *seno* e *cosseno* e optaram pela utilização da razão tangente, os alunos demonstraram que a *reconciliação* desses conceitos foi o caminho encontrado para atingirem de forma eficaz a resolução do problema.

O desenvolvimento da atividade aproximou-se das concepções de Ausubel (2000), Novak e Gowin (1984) e Moreira e Masini (2011). Para esses autores, a transposição de conceitos teóricos para situações reais do cotidiano do aluno, ou propositais propostas pelo professor, desencadeiam processo de *diferenciação progressiva* dos conceitos estudados, que culmina com a *reconciliação integradora* desses mesmos conceitos. Segundo os autores, tais processos evidenciam níveis de aprendizagem superiores, que se encaminham para uma aprendizagem significativa, quiçá, outros níveis de aprendizagem.

As práticas exploratórias introduzidas com as atividades até aqui apresentadas, não eram hábito dos alunos da turma pesquisada. No entanto, dado o preconizado pela literatura, a estratégia de usá-las visou transpor a barreira do ensino propedêutico para uma experiência significativa com as *razões trigonométricas no triângulo retângulo,* modificando assim suas percepções em torno do encadeamento dos conceitos inter-relacionados, que, por sua vez, potencializam e ampliam as possibilidades de *diferenciação* e *reconciliação* dos conceitos relacionados ao conteúdo. Nesse sentido, houve uma significativa evolução na maneira desses alunos enxergarem a aplicabilidade prática do assunto.

Segundo Vergnaud (1994), através das situações e dos problemas a resolver, o conceito adquire sentido para o adolescente. As atividades em grupo estimularam a troca de ideias, pois houve maior socialização entre os alunos e, consequentemente, maior participação. Além disso, a situação prática contribuiu para a contextualização dos conceitos. Ao explorarem o ambiente externo à escola para fazerem medidas utilizando o *Astrolábio*, os alunos tiveram que tomar decisões a respeito de quais seriam as *razões trigonométricas* a serem usadas em cada caso, como também aprenderam a argumentar por que elas seriam as mais adequadas.

Epistemologicamente, o objeto de estudo aqui definido (*razões trigonométricas no triângulo retângulo*) é o meio, enquanto a trigonometria se apresenta como objeto mediador dessa relação. O aluno utilizou a trigonometria para concretizar sua relação com o meio, seja ela uma relação de transformação ou apenas explicação. Essa visão, ideia, experiência, ou conceito possibilitou que as *razões trigonométricas no triângulo retângulo* deixassem de ser concebidas como conceitos abstratos e fossem admitidos como concretos.

Apesar de a experiência mostrar-se interessante para os alunos que estavam descobrindo a trigonometria, a lição extraída, e relevante para essa etapa da pesquisa, é que o processo de aprendizagem é individual e contextualizado. Consideramos que o potencial uso da *Teoria da Aprendizagem Significativa* e da *sequência didática*, assim como de um ensino que visasse a resolução de problemas do cotidiano contribuiu para a aprendizagem das *razões trigonométricas no triângulo retângulo*, tendo em vista sua relação com a prática. Assim sendo, na continuidade da nossa experiência de ensino, Parte III da *sequência didática,* enfatizamos o uso das *ferramentas informáticas* como possibilidade de explorar, verificar, contextualizar e aprofundar o conhecimento dos alunos acerca do assunto, procurando sempre identificar indícios de organização e de integração hierárquica dos conceitos abordados nas estruturas cognitivas.

Dando prosseguimento às propostas de atividades, vistos alguns *subsunçores* que permeiam a Geometria e introduzidos os conceitos de *seno*, *cosseno* e *tangente*, que iniciam o estudo da trigonometria, propomos a utilização do *software* livre *GeoGebra* , como ferramenta de apoio ao desenvolvimento da Parte III, da *sequência didática*. Inferimos que, dada a popularidade da ferramenta em meio aos professores, sobretudo, os de Matemática, a utilização do *software* nos pareceu uma alternativa interessante, visto, que a partir das práticas que apresentamos, a utilização deste ou de similares pode ampliar as práticas pedagógicas de outros professores das mais distintas Áreas. Outro fator que justifica a utilização do *software GeoGebra* é o fato de ser um *software* gratuito, de fácil manuseio e também por estar disponível em diferentes sistemas operacionais, entre eles o *Linux* e o *Windows*.

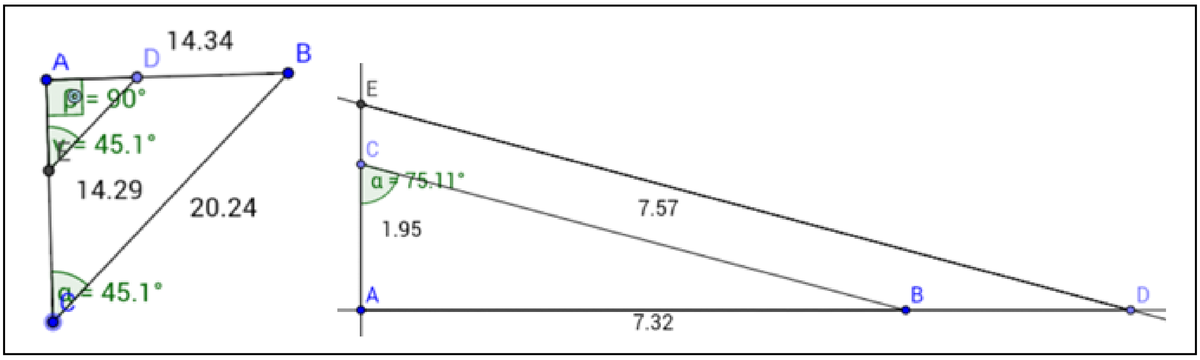
A proposição feita aos alunos para iniciar o manuseio do *software* foi que, a partir das ferramentas disponíveis, construiríamos um triângulo retângulo. Nossa intenção com essa construção foi retomar os conceitos estudados para verificar o nível de *diferenciação* e de *reconciliação* dos alunos, uma vez que a visualização dos valores numéricos do *seno*, *cosseno* e *tangente*, ao mesmo tempo, poderia auxiliá-los na relação de *diferenciação*, no momento da utilização do *GeoGebra,* apresentado na Figura 30.

Figura 30 – Alunos manipulando inicialmente o *GeoGebra* nos *tablets*

Fonte: o autor, 2019.

Após a manipulação inicial do *software* (FIGURA 30), para maior familiaridade dos alunos, iniciamos a realização da parte mais básica da atividade de construção do triângulo retângulo com os estudantes. Nesta etapa, destacamos características da figura construída e prosseguimos mostrando aos alunos, outras possibilidades de comprovação gráfica, como, por exemplo, as relações de semelhança que podem ser visualizadas a partir da Figura 31. A retomada do assunto foi o mecanismo encontrado para reforçar as propriedades mais específicas relacionadas a ele. Segundo Ausubel (2003) e Moreira (2009), o professor deve retomar a explicação do mesmo assunto, com nova abordagem, até que tenha certeza de que os aprendizes esgotaram todas as suas dúvidas em relação ao tema.

Figura 31 – Construção de triângulo semelhantes com o *GeoGebra*



Fonte: o autor, 2019.

Com base na construção dos triângulos semelhantes, conforme Figura 31 acima, propomos, por meio das atividades da *sequência didática* (APÊNDICE F), exercícios que estimularam a utilização do *software* como aliado na execução das tarefas propostas. Uma delas estava relacionada ao preenchimento de um quadro, no qual os alunos relacionaram o valor do ângulo ∝ e das razões, através da movimentação dos vértices dos triângulos construídos. No quadro, os valores visualizados deveriam ser relacionados ao valor do ângulo, como também das identidades: seno∝, cosseno∝ e tangente∝, conforme estrato apresentado na Figura 32.

Figura 32 – Registro de dados de um aluno

1) A partir da construção realizada, preencher o quadro a seguir:

Ângulo α	Seno α	Cosseno α	Tangente α
40°	0,64	0,76	0,83
35°	0.57	0,81	0,70
55°	0,81	0,57	1.43
55°	0,81	0.57	~1,43
45°	0,70	0,70	1

Fonte: o autor (2019).

Na atividade que propomos, destacamos a utilização de recursos tecnológicos (computador, *tablet*, telefones celulares, projetor multimídia, *software*) como auxiliares ao reforço dos processos de ensino e de aprendizagem das *razões trigonométricas no triângulo retângulo*. Moreira (2009) recomenda ao professor que cada conhecimento novo aprendido pelo aluno seja sempre retomado de maneira diferente, até haver certeza de que o aprendiz o incorporou significativamente. Nesse sentido, foram utilizadas atividades pautadas tanto no uso do *software*, quanto em práticas que demandaram o uso de papel e lápis, em que ambas se retroalimentavam. Acerca do uso dos distintos meios, Ausubel (2003) destaca que os alunos conseguem organizar, armazenar e encadear melhor os conceitos, de acordo com a vicissitude das formas que lhes são ensinadas.

Nesse sentido, com o objetivo de ampliar as relações a serem introspectadas pelos estudantes, destacamos que o recurso do uso de ferramentas cognitivas da informática colocou os alunos como membros ativos e principais da própria construção do conhecimento, numa nova ambientação de ensino. Em consonância com as concepções de Jonassen (1996, 2007), destacamos que a dimensão ativa ocasionada pela presença das ferramentas apresenta características manipulativas e observantes. Em face do exposto, Jonassen (1996, 2007) colabora destacando que a aprendizagem significativa permite o procedimento ativo dos alunos, que interagem com o ambiente e manipulam ativamente as informações retiradas dos objetos de conhecimento, ou seja, do fenômeno estudado.

Os depoimentos dos alunos: *“professor por que não usamos o GeoGebra para estudar outros assuntos com a profe?”*; outro, *“achei que fosse mais difícil trabalhar no computador, mas agora percebo que mexer na caixa de ferramentas não é tão difícil assim”*; outro, *“quero ter mais aulas com o GeoGebra”*. Tais manifestações evidenciam motivação, interesse e satisfação por terem trabalhado pela primeira vez com o *software GeoGebra* (nenhum aluno havia manipulado as ferramentas ou ouvido falar do *software* antes da intervenção). A possibilidade de manipulação verificada na Figura 31 pode ter auxiliado os alunos a visualizarem situações que as figuras estáticas desenhadas com lápis e papel são incapazes de mostrar.

Depois do triângulo construído e do desenvolvimento das atividades implícitas da construção proposta, encaminhamos a segunda atividade com o auxílio do *software*: *Cálculo de inclinação de ruas*. A modelagem proposta (APÊNDICE F) buscou revisitar todos os conceitos trabalhados, dos geométricos aos trigonométricos, na tentativa de melhorar a articulação e o encadeamento dos conceitos por parte dos alunos, consolidando-os significativamente. Para desenvolver a atividade, solicitamos aos alunos que observassem, na cidade, uma rua com elevado grau de inclinação, que observassem também se havia um referencial perpendicular à base, que poderia ser um poste, uma parede, um muro, uma árvore linear, ou outros. Feita a identificação, que a fotografassem e a levassem para ser trabalhada com o *software* em sala de aula.

Muitas foram às imagens trazidas pelos alunos para serem modeladas; porém, depois de expormos as imagens para a turma, por meio de um projetor multimídia, os alunos optaram por trabalhar com a Figura 33, apresentada a seguir. A escolha levou em consideração a qualidade da imagem e os elementos explícitos que deveriam ser trabalhados como: o grau de inclinação, a referência perpendicular, entre outros.

Figura 33 – Imagem escolhida pelos alunos para modelagem

Fonte: o autor

Após todo o caminho trilhado até aquele momento, já não seriam mais necessários conceitos prévios, pois intuíamos que o desenvolvimento das atividades anteriores teriam suprido os alunos dos conhecimentos necessários, entre os quais destacamos:

- Identificar um triângulo retângulo e seus elementos.
- Inferir as razões de o triângulo retângulo ser uma figura geométrica especial.
- Explicitar características que observa no triângulo.
- Quantificar a somatória das medidas dos seus ângulos internos.
- Identificar as razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Convicto da ancoragem dos conceitos supracitados nas estruturas cognitivas dos alunos, auxiliado por um tutorial, propomos o fechamento do conteúdo das *razões trigonométricas no triângulo retângulo*, de tal forma que os alunos percebessem sua íntima conexão com a semelhança de triângulos. Dessa forma, inferimos que estávamos contribuindo para que os aprendizes visualizassem as *razões trigonométricas no triângulo retângulo* como fruto da semelhança desses triângulos, evitando a ideia de dissociabilidade entre esses conceitos. Nesse sentido, prosseguimos com a atividade, com o auxílio do uso de *notebooks* e *tablets*, conforme Figura 34.

Figura 34 – Alunos usando ferramentas cognitivas

Fonte: o autor, 2019.

No momento apresentado na Figura 34, auxiliado por bolsistas e ex-bolsista do grupo de pesquisa Tendências no Ensino, vinculado ao PPGEnsino, reforçamos as orientações acerca dos procedimentos, sanando eventuais dúvidas oriundas do tutorial. Posteriormente, seguimos com os encaminhamentos que culminaram com a modelagem da imagem (FIGURA 33).

Segundo Dante (2006), o ato de modelar um problema contextualizado, ou não, deve ter como metas: fazer o aluno pensar; desenvolver o raciocínio lógico do aluno; ensinar o aluno a enfrentar situações novas; levar o aluno a conhecer as aplicações da Matemática; tornar as aulas mais interessantes e motivadoras. Nesse processo, segundo o autor, para que a resolução de problema se torne eficaz no processo de aprendizagem, o professor deve atuar como mediador e organizador da aprendizagem dos estudantes: encorajar a busca de soluções, valorizar os processos de pensamento, incentivar a comunicação matemática e envolver todos em tarefas ricas e significativas do ponto de vista intelectual.

Ausubel et. al. (1980) e Ausubel (2000) ressaltam que, ao lançarmos mão desse mecanismo, devemos reconhecer que soluções de problemas e experimentos não são experiências genuinamente significativas, a menos que satisfaçam duas condições. Primeiro, devem ser construídas sob uma base de princípios e conceitos claramente compreensíveis. Segundo, as operações envolvidas devem ser significativas. Assim, de acordo com as ideias dos autores, inferimos que a atividade de modelagem proposta teve papel significativo nos processos de *diferenciação* e de *reconciliação* dos conceitos de *razões trigonométricas no triângulo retângulo*. Ao relacionar a Matemática escolar com a Matemática do cotidiano do aluno, atribuímos sentido e significado ao conteúdo estudado. Ausubel (2000, 2003), Jonassen (1996, 2007), Moreira (2009), Moreira e Masini (2011) e Novak e Gowin (1984) salientam que, quando o professor faz conexões entre os conceitos mais gerais e suas especificidades, o aluno recebe as informações, assimila-as, relaciona-as com seus conhecimentos prévios, organiza-as e conecta-as aos seus mapas mentais, dando-lhes significado. Dessa forma, segundo os autores, ocorre a aprendizagem significativa que possibilita ao aluno aplicar essa aprendizagem a demandas do seu cotidiano.

Em nossa investigação, usamos vários recursos de ensino, em busca de um caminho metodológico que se distanciasse das corriqueiras abordagens tradicionais no ensino da trigonometria, neste caso específico, das *razões trigonométricas no triângulo retângulo*. Durante o percurso, o nosso papel foi sempre o de mediador, e o do aluno, de protagonista ativo do processo. Dessa forma, inferimos ter contribuído para a construção da aprendizagem significativa dos aprendizes, apoiando suas iniciativas e direcionando-as quando necessário.

A experiência de ensino que apresentamos gerou avanços significativos em relação à aprendizagem das *razões trigonométricas no triângulo retângulo,* em comparação com pesquisas anteriores realizadas nesse campo. Dessa forma, supomos que a maneira como foi pensada e executada a *sequência didática* levou os alunos a entenderem a relevância do conteúdo trabalhado, fazendo com que eles conseguissem externar e transcrever situações que demonstrassem a transposição de conceitos teóricos para situações práticas do dia a dia, atingindo assim, indícios de aprendizagem significativa defendidos por Ausubel (1968, 2000, 2003), Jonassen (1996, 2007), Moreira (1999, 2004, 2009), Novak e Gowin (1984), Ausubel, Novak e Hanesian (1980).

Os resultados alcançados permitem-nos inferir que a *sequência didática* proposta, a partir de um conjunto de atividades em que foram utilizados recursos de ensino diferenciados, parece consistente e coerente, porque sua construção, tal como o trabalho do engenheiro, apoiou-se em alicerces firmes, previamente estabelecidos, e foi edificada com base na relação entre teoria e experimentação e finalizada com sua validação e institucionalização. Considerando os princípios que determinam a aprendizagem significativa, conforme descritos por Moreira (2011[a]), concluímos que a *sequência didática* sobre *razões trigonométricas no triângulo retângulo* proposta é um material potencialmente significativo.

Encerrada a fase de experimentação preconizada por Artigue (1996), passamos para a terceira fase da *Engenharia Didática,* que compreende a análise a *posteriori*. Nesta fase, perspectivando confrontar os resultados obtidos na análise a *priori,* com os conseguidos na análise a *posteriori*, recorremos aos instrumentos de coleta, teste de conhecimentos final e mapa conceitual final.

Conforme já foi explicitado, o teste de conhecimentos final, composto por 8 atividades, apesar da semelhança com o teste de conhecimentos inicial, buscou mobilizar o conhecimento dos alunos por questionamentos de maior complexidade, buscando identificar pistas que ensejassem indícios dos processos de *diferenciação progressiva* (ideias mais gerais e inclusivas, que possam, progressivamente, ser diferenciadas em termos de especificidade) e, consequentemente, de *reconciliação integradora* (relações entre conceitos e proposições) dos conceitos estudados. A finalidade foi identificar a evolução conceitual dos alunos, considerando a interação do novo conhecimento com o conhecimento prévio relevante, e perceber se as características da *sequência didática* proposta corroboraram para uma aprendizagem potencialmente significativa. Para melhor encadearmos o processo de análise, tratamos dessa busca na análise da Categoria 4.1.3, discutida na próxima seção.

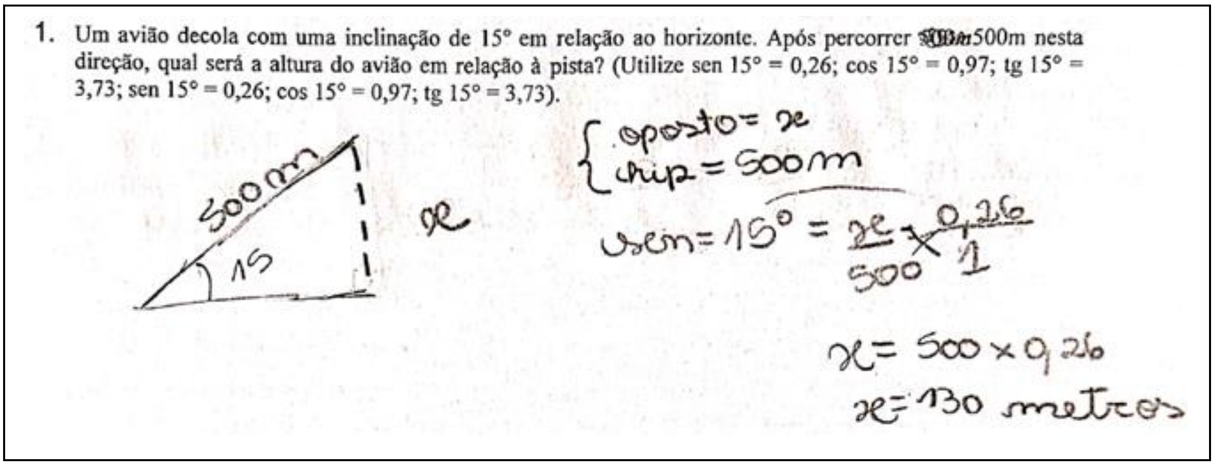
4.1.3 A *diferenciação progressiva* e a *reconciliação integradora.*

Na análise dessa Categoria, denominada de *diferenciação progressiva* e *reconciliação integradora*, procuramos evidenciar indícios relacionados aos dados que emergiram e foram registrados por meio dos instrumentos de coleta utilizados no decorrer da pesquisa e que caracterizam tais princípios. Neste percurso, fomos subsidiados pelo confronto direto entre a análise a *priori* (com base no levantamento de informações acerca dos conhecimentos prévios apresentados na primeira categoria) e a análise a *posteriori,* que ensejou resposta ao nosso terceiro objetivo específico traçado para essa pesquisa.

Iniciamos a análise a partir do teste de conhecimentos final, cujos resultados obtidos evidenciaram um processo evolutivo das concepções e dos conceitos acerca do tema, *razões trigonométricas no triângulo retângulo*.

No teste de conhecimentos final, por meio de uma situação-problema, procuramos mobilizar os conhecimentos já experenciados pelos alunos. O intuito de utilizar a questão foi instigar os conceitos acerca das *razões trigonométricas* num processo cíclico de *diferenciação* e *reconciliação*, de acordo com o estrato apresentado na Figura 35, a seguir.

Figura 35 – Questão 1 do teste de conhecimentos final


1. Um avião decola com uma inclinação de 15° em relação ao horizonte. Após percorrer 500m nesta direção, qual será a altura do avião em relação à pista? (Utilize sen 15° = 0,26; cos 15° = 0,97; tg 15° = 3,73; sen 15° = 0,26; cos 15° = 0,97; tg 15° = 3,73).

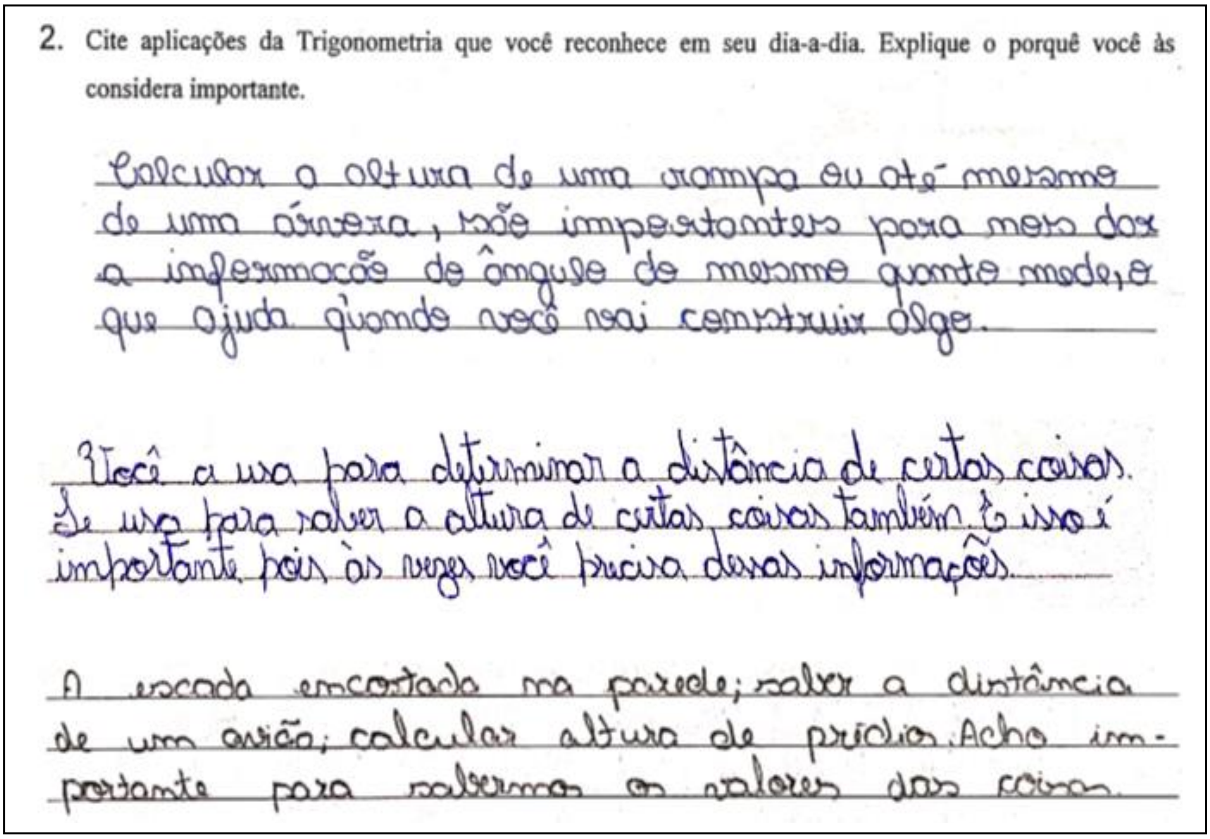
Fonte: o autor, 2019.

Ressaltamos que, para trabalharem a questão (FIGURA 35) e as demais com maior agilidade e fazerem os cálculos num curto período de tempo, os alunos dispunham de calculadoras científicas para auxiliá-los no processo. Observando as resoluções, constatamos que a maioria dos alunos identificou corretamente as relações entre o cateto do triângulo e a hipotenusa, projetada a partir da decolagem do avião evidenciando inicialmente a diferenciação entre os conceitos embutidos, que consequentemente culmina com a reconciliação dos mesmos, quando o aluno utiliza uma das relações métricas para solucionar o questionamento.

Ressaltamos que essa mesma questão já estava associada à máxima mobilização de complexidade dos conceitos trabalhados no teste de conhecimentos inicial. O bom índice de aproveitamento da questão no teste de conhecimentos final foi, possivelmente, resultado da evolução dos conhecimentos ancorados a partir do desenvolvimento da *sequência didática,* que, por sua vez, pode ter corroborado nos processos de *diferenciação* e de *reconciliação* dos conceitos, favorecendo a evidência de indícios de melhoras na aquisição e na retenção de conhecimentos. O fato pode ser justificado pela forma como a questão foi interpretada pelo aprendiz, pois, de acordo com o estrato que apresentamos, o aluno não só interpretou qual das *razões trigonométricas* era a mais apropriada para a solução do problema, mas também reconheceu a relação entre os lados (cateto oposto e hipotenusa).

Na questão de número 2, procuramos verificar se os alunos conseguiam enxergar aplicações da trigonometria no seu dia a dia e se as consideravam importantes. Para explicitar as percepções dos aprendizes, a Figura 36 apresenta alguns estratos que corroboram nossos achados.

Figura 36 – Questão 2 do teste de conhecimentos final



2. Cite aplicações da Trigonometria que você reconhece em seu dia-a-dia. Explique o porquê você às considera importante.

Calcular a altura de uma rampa ou até mesmo de uma árvore, são importantes para mais dar a informação de ângulo do mesmo quanto modo, o que ajuda quando você vai construir algo.

Você a usa para determinar a distância de certas coisas. Se usa para saber a altura de certas coisas também. E isso é importante pois às vezes você precisa dessas informações.

A escada encostada na parede; saber a distância de um avião; calcular altura de prédios. Acho importante para sabermos os valores das coisas.

Fonte: o autor, 2019.

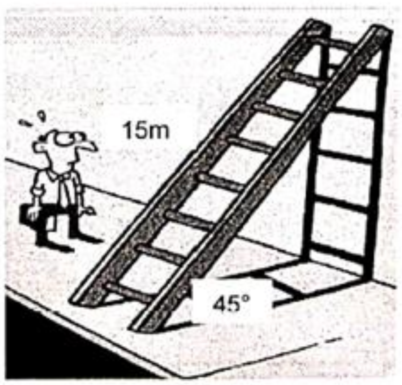
Os estratos apresentados na Figura 36, representativos do pensamento da maioria dos alunos, evidenciam níveis consideráveis de reconhecimento das aplicações para o nível de ensino investigado, tal fato não havia sido identificado quando da análise a *priori*, feita inicialmente. O fato é, que após terem passado pela experiência de ensino, os aprendizes evoluíram consideravelmente em termo de conhecimento acerca da temática, apresentando assim, indícios evolutivos dos processos de diferenciação e reconciliação dos conceitos. Em relação aos excertos que emergiram como respostas: altura de árvore, medida de ângulo, determinação de distância, entre outras podem estar relacionadas ao tipo de experiência que tiveram, em contato com o desenvolvimento da *sequência didática* ou com as proposições que emergiram em sala de aula, mediadas pelo interventor.

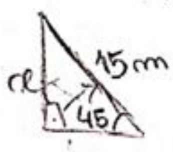
Segundo Ausubel (1968, 2000, 2003), a sistematização dos princípios que propiciam ao ser humano situar-se no mundo, organizando sua experiência e atribuindo significados à sua realidade, revela sua compreensão e autorrealização quando condições educacionais apropriadas lhe são oferecidas. Nesse sentido, evidenciadas as possibilidades de aplicações das *razões trigonométricas* no dia a dia dos pesquisados, inferimos que as utilidades que emergiram também podem fazer parte das abstrações das experiências idiossincráticas de cada aprendiz.

A questão 3 desse teste de conhecimentos também fez parte do teste de conhecimentos inicial. Naquele momento, os alunos foram provocados a mobilizarem os conhecimentos prévios por meio da mesma imagem que trabalhamos no teste de conhecimentos final. No teste de conhecimentos inicial, poucos alunos marcaram a alternativa correta como resposta do problema. Além disso, nenhum estudante justificou, por meio de cálculos ou redação, como haviam imaginado as proposições que os levariam à solução do problema proposto. No teste de conhecimentos final, os resultados evidenciaram que esses mesmos alunos passaram a ter clareza em relação ao processo de matematização apresentando robustos indícios de diferenciação e de reconciliação dos conceitos apreendidos. Sendo assim, expomos, na Figura 37, a maneira pensada pelos alunos para a resolução do questionamento.

Figura 37 – Questão 3 do teste de conhecimentos final

3. A que altura de uma parede uma escada de 12m se apoia, se a base da escada e a superfície plana formam um ângulo de 30°? Descreva como você pensou para resolver esta situação.





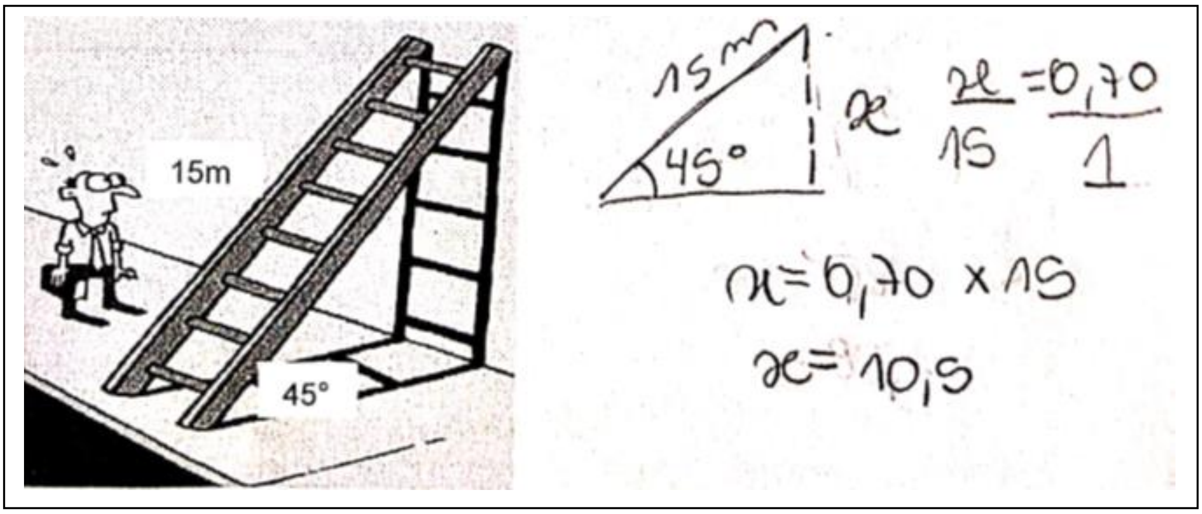
$45 = \frac{\alpha}{15}$

$\frac{0{,}7}{1} \times \frac{\alpha}{15}$

$\alpha = 0{,}7 \cdot 15$

$\alpha = 10{,}5$

~~a)~~ 10,5m   b) 10,18m   c) 6m   d) 6,18m   e) 12,18m

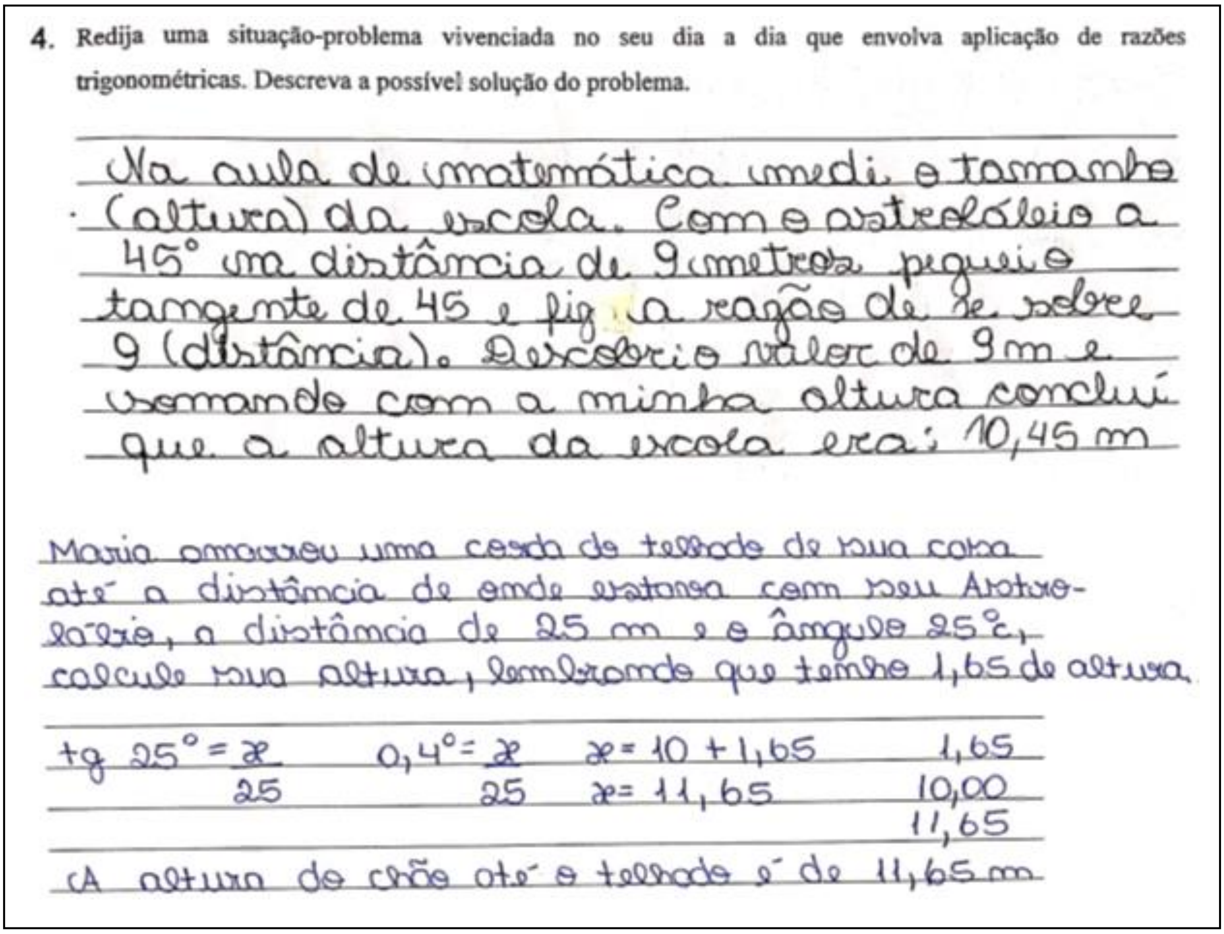


Fonte: o autor, 2019.

A reaplicação da questão, teve como propósito a verificação da aquisição dos novos conceitos trabalhados a partir do desenvolvimento da *sequência didática*. Os resultados demonstraram que os alunos compreenderam (apreenderam) tais conceitos e incorporaram outros subordinados a eles. Ao verificar as imagens, percebemos que os alunos a converteram num polígono triangular. Imaginamos que suas estruturas cognitivas ou mapas mentais visualizaram (compararam) melhor a situação, por meio de seus próprios gráficos. Também observamos nas resoluções que os alunos utilizaram o triângulo retângulo em posições diversas para explicitar as resoluções. Tal fato nos leva a crer que esses aprendizes se apropriaram de outra proposição esclarecida no início da nossa intervenção. Naquele momento, chamamos a atenção para o posicionamento espacial do triângulo, que, independente da sua posição no espaço, mantém suas propriedades.

Analisando a forma como os alunos posicionaram os seus gráficos, inferimos que eles tinham clareza da relação que estavam fazendo. Nessa perspectiva, na questão seguinte, procuramos evidenciar se as práticas vivenciadas pelos alunos foram significativas do ponto de vista prático. Então, na questão 4, propomos aos alunos que redigissem uma situação-problema que evidenciasse uma aplicação das *razões trigonométricas* no seu dia a dia. Nesse sentido, apresentamos, na Figura 38, alguns estratos.

Figura 38 – Situações-problema redigidas pelos alunos



4. Redija uma situação-problema vivenciada no seu dia a dia que envolva aplicação de razões trigonométricas. Descreva a possível solução do problema.

Na aula de matemática medi o tamanho (altura) da escola. Com o astrolábio a 45° na distância de 9 metros peguei o tangente de 45 e fiz a razão de x sobre 9 (distância). Descobri valor de 9m e somando com a minha altura concluí que a altura da escola era: 10,45 m

Maria amarrou uma corda do telhado de sua casa até a distância de onde estava com seu Astrolábio, a distância de 25 m e o ângulo 25°, calcule sua altura, lembrando que tenho 1,65 de altura

$tg\ 25° = \frac{x}{25}$ $\quad 0{,}4° = \frac{x}{25}$ $\quad x = 10 + 1{,}65$ $\quad x = 11{,}65$

$1{,}65 + 10{,}00 = 11{,}65$

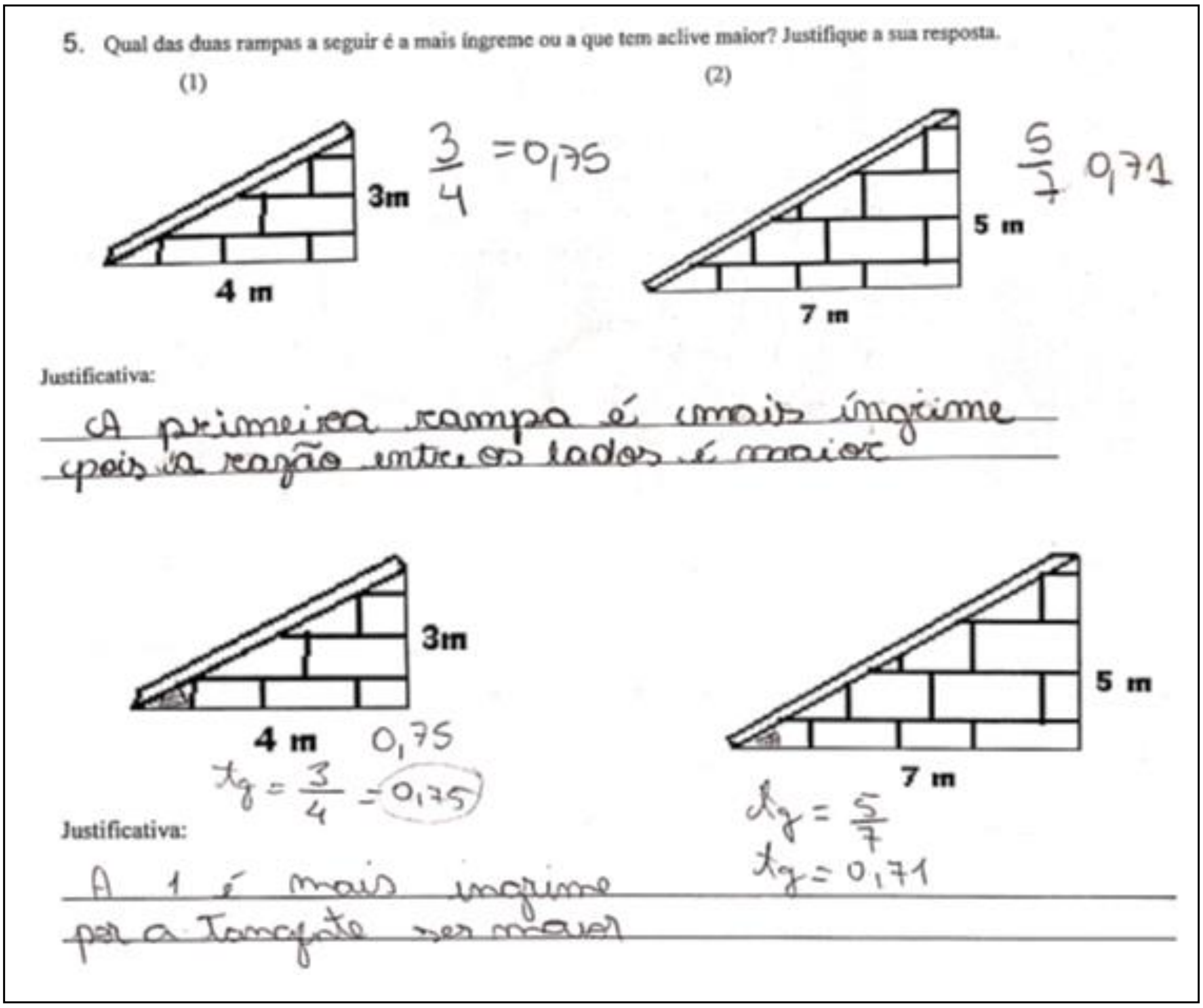
A altura do chão até o telhado é de 11,65 m

Fonte: o autor, 2019.

Percebemos que, nas diversas situações-problema redigidas e apresentadas pelos alunos, diversificação em relação a aplicabilidade do conceito, o que nos faz intuir que houve uma expansão dos conhecimentos a partir das correlações feitas com às situações vivenciadas a partir das proposições da *sequência didática* experimentada. Sendo assim, inferimos que as experiências vividas tiveram impacto significativo nas estruturas cognitivas desses alunos de tal maneira que as vivências os levaram a transposição dos conceitos trabalhados em outros momentos, no caso, o desenvolvimento dessa atividade. Considerando esses significados, a situação pode ser interpretada como um indício de diferenciação progressiva e de reconciliação integradora, no qual a aprendizagem significativa propiciou a inclusão dos conceitos estudados ao conhecimento prévio num processo de retroalimentação, levando os alunos à reprodução instintiva dos processos de aquisição e de construção de conhecimentos.

A questão 5 desse teste de conhecimentos final também tinha sido utilizada no questionário inicial, quando, apenas 8 alunos conseguiram marcar a alternativa correta correspondente à resposta do questionamento. Porém, em nenhuma das respostas foi evidenciada a prescrição algébrica ou dissertativa, que desse margem à interpretação da segurança dos alunos ao respondê-la. Diferentemente do que aconteceu no teste de conhecimentos inicial, na fase final, os resultados foram diferentes, como podemos evidenciar no estrato da Figura 39.

Figura 39 – Questão 5 do teste de conhecimentos final



Fonte: o autor, 2019.

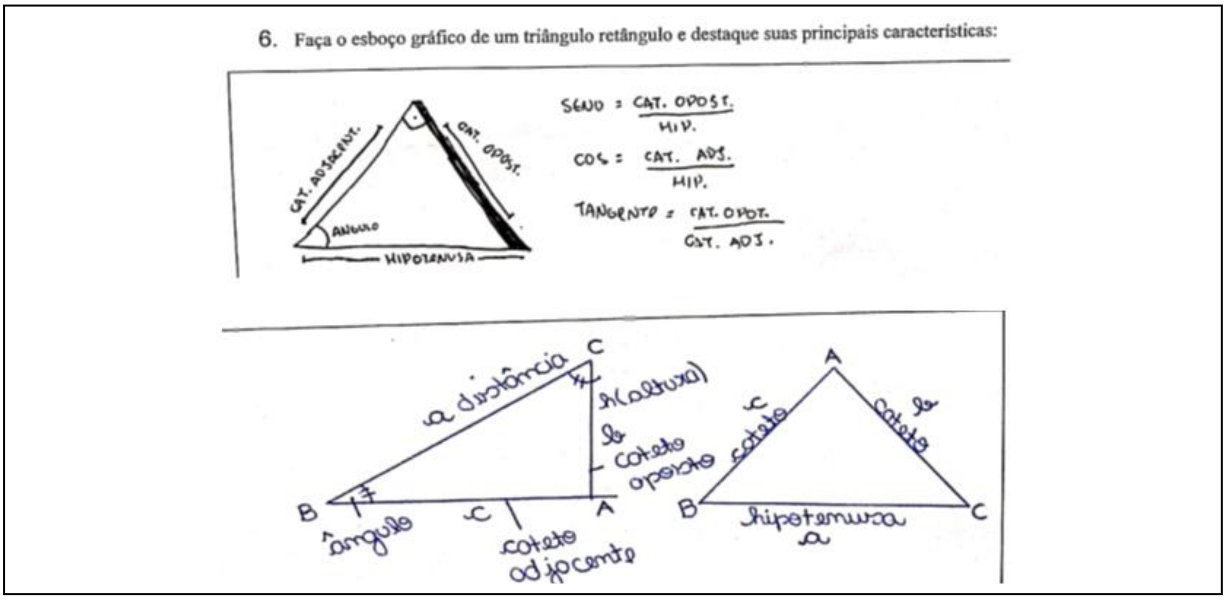
Os estratos representativos evidenciam a apropriação de, pelo menos, dois conceitos trabalhados na *sequência didática*: proporcionalidade e *razões trigonométricas* (no caso a identificação da relação *tangente*), evidenciando indicativos de diferenciação e de reconciliação dos conceitos implícitos. A maneira como os alunos se posicionaram diante do questionamento apresenta níveis consideráveis de desenvolvimento conceitual que corroboram indicativos de diferenciação progressiva e de reconciliação integradora.

Ainda, a partir dos depoimentos dos alunos evidenciamos a amplitude de sua compreensão, ao nos depararmos com as seguintes justificativas: *é a primeira rampa porque a razão de proporcionalidade entre os lados é maior; por que temos cateto oposto e cateto adjacente que nos dá a tangente, e ela é maior na primeira rampa; a 1 porque quanto maior o valor da tangente, maior é o ângulo*. As assertivas corroboram indícios da eficácia dos processos de ensino e de aprendizagem pelos quais esses alunos passaram.

Nas palavras de Moreira (2014), encontramos o respaldo para as justificativas apresentadas pelos alunos. Para o autor, aprender significativamente envolve pensar, pensar envolve imaginar, fazer analogias, buscar diferenças e semelhanças, fazer aproximações, matematizar, teorizar, argumentar. Quando o aluno assume a postura de reconhecimento dos novos conhecimentos recebidos, passa a interagir cognitivamente com outros conceitos já aprendidos e, a partir deles, constrói novos conhecimentos que os conduzem a aprendizagens superiores.

Na intenção de levantar o máximo de informações possíveis acerca dos processos de *diferenciação* dos conceitos pelos alunos, na questão de número 6, procuramos saber se eles eram capazes de suscitar as características de um triângulo retângulo. O questionamento foi respondido por todos os alunos com desenvoltura, conforme estratos apresentados na Figura 40, a seguir:

Figura 40 – Questão 6 do teste de conhecimentos final



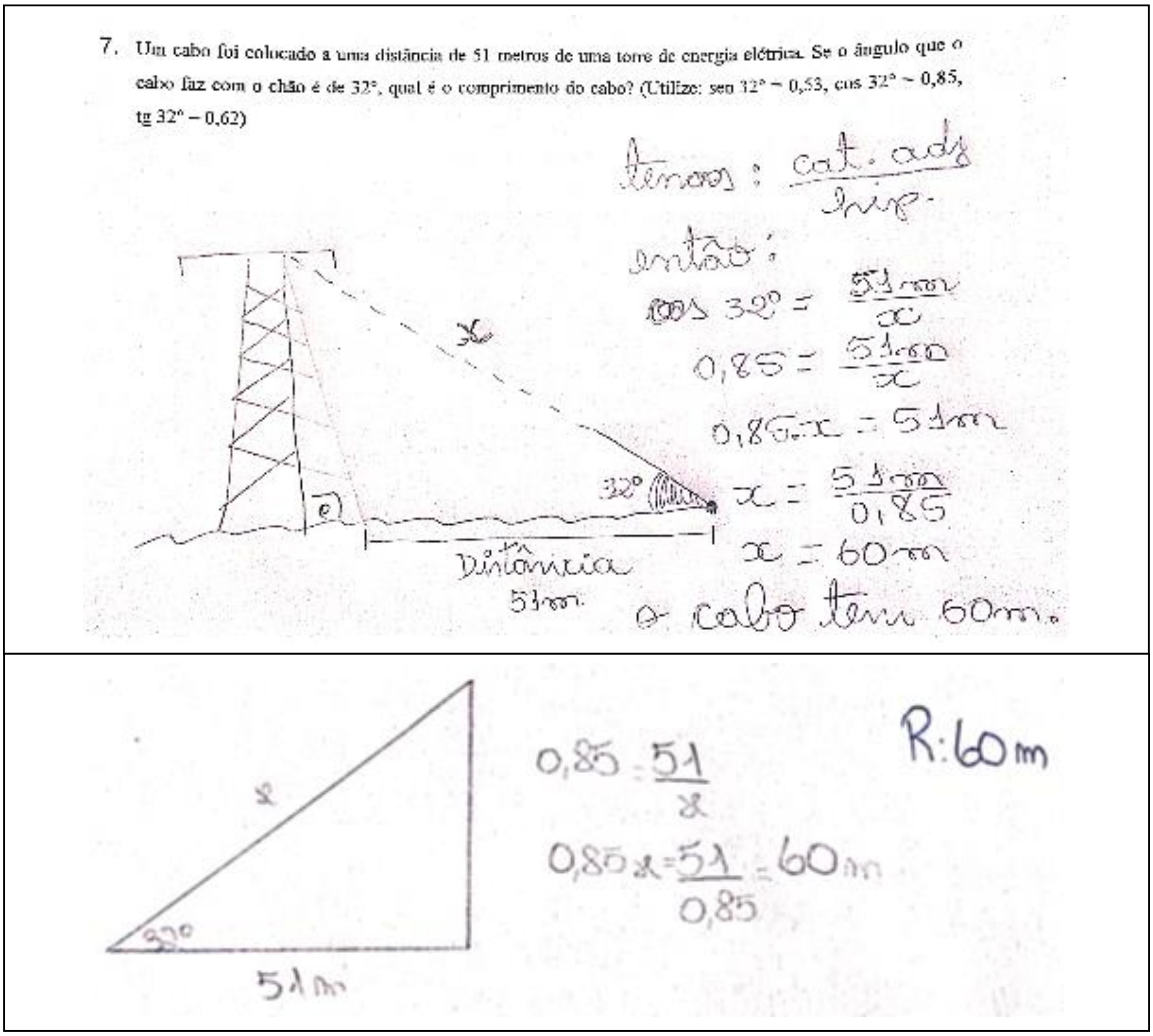
Fonte: o autor, 2019.

Observamos, por meio dos gráficos, que os alunos partem de conceitos hierárquicos válidos: ângulos, catetos, hipotenusa, razões trigonométricas e vice-versa. Tais distinções, em nosso ver, estão implícitas aos processos de *diferenciação progressiva* e *reconciliação integradora,* uma vez que, segundo Moreira (2009) e Ausubel (2003), a *reconciliação* é um processo da dinâmica da estrutura cognitiva, simultâneo ao da *diferenciação progressiva*.

Nesse sentido, quando o aluno faz ligações transversais entre conceitos que outrora eram considerados distintos, segundo Novak e Gowin (1999), há evidências de que houve *reconciliação integradora,* que, no caso exposto, está relacionada às razões *seno*, *cosseno* e *tangente* e os catetos e a hipotenusa. De acordo com os autores, a identificação desse critério é forte indício da presença de uma aprendizagem significativa que supera a simples distinção de níveis hierárquicos. A partir dos estratos coletados, supomos que a aprendizagem significativa dos alunos resultou não só da conexão dos novos conhecimentos, mas também dos conceitos já aprendidos que antes eram vistos como isolados. Segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980), nesse caso, também houve um processo de *reconciliação integradora*.

Na questão 7, por meio de outra situação-problema, procuramos evidenciar se os alunos eram realmente capazes de identificar qual das *razões trigonométricas* era a mais indicada para a solução do problema. As respostas evidenciaram a apropriação e a distinção entre os conceitos trabalhados, apresentando níveis elevados de *diferenciação*, conforme recorte das respostas de 2 alunos pesquisados, apresentadas na Figura 41, a seguir.

Figura 41 – Recorte da questão 7 do teste de conhecimentos final

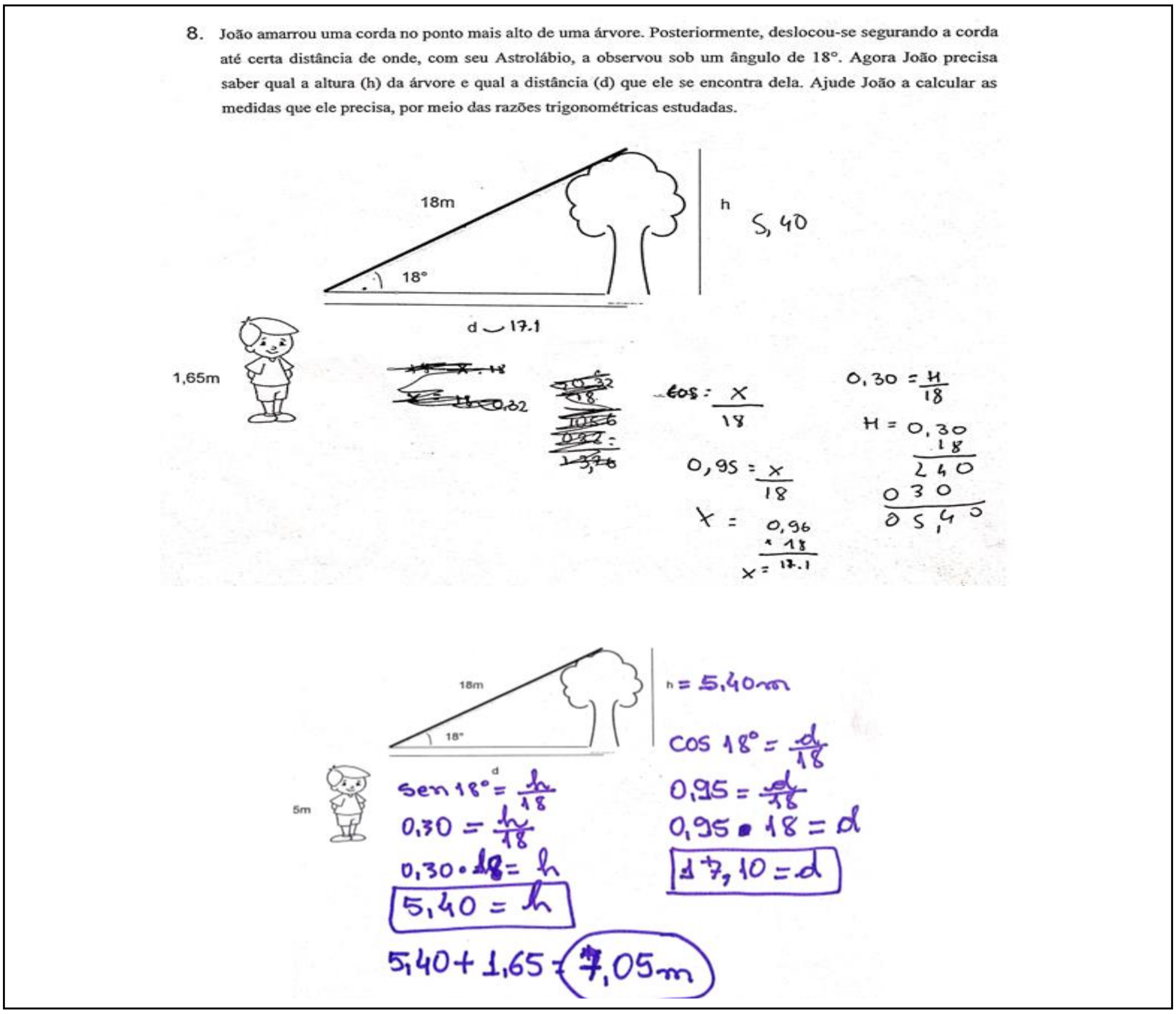


Fonte: o autor, 2019.

Como a aprendizagem é idiossincrática, identificamos nos estratos, diferentes formas de estruturação (desenho, organização dos dados, sentenças matemáticas) do pensamento dos aprendizes. Enquanto um dos alunos explorou os dados do problema, procurando exemplificar sua redação, o outro partiu da simples interpretação de uma forma triangular. No entanto, independentemente dos mapas mentais, ambos chegaram ao objetivo. Nesse caso, a *diferenciação progressiva* do conceito já conhecido ocorreu por meio da distinção entre esse conceito e outros similares, que estão num mesmo nível hierárquico, conforme nos lembram Ausubel, Novak e Hanesian, (1980).

Para concluir, na questão 8, procuramos remeter os alunos a uma das situações vivenciadas durante o processo investigativo. De acordo com seus depoimentos, transcritos na seção 4.1.2, p.186 dessa tese, os quais evidenciam maior identificação com as atividades práticas realizadas em campo, propomos uma situação-problema que se aproximasse da experiência que tiveram anteriormente, conforme estratos de 2 alunos que apresentamos na Figura 42, a seguir.

Figura 42 – Questão 8 do teste de conhecimentos final



Fonte: o autor, 2019.

As soluções demonstram que os alunos passaram a dominar os conceitos trabalhados durante o desenvolvimento da *sequência didática*. No entanto, uma parcela significativa dos alunos não levou em consideração a altura do observador para a determinação da altura da árvore, a citar, a primeira resolução apresentada na Figura 41. Essa mesma observação foi feita em pesquisas realizadas por Ocanha (2016) e Mascarin (2017). Na ocasião, as pesquisadoras aplicaram questionamento similar como atividade de pós-teste e, em suas análises, consideraram que a pressa em encontrar a solução e a falta de uma leitura atenta do problema levaram os alunos a conclusões precipitadas. Corroborando a abordagem, Jonassen (1996, 2007) destaca que, para apropriar-se de um conceito ou dos aspectos que envolvem uma situação, o aluno pode levar muito tempo.

Nesse sentido, destacamos que, mesmo que a maioria dos alunos não tenha atentado para o fato explicitado, o cálculo para a determinação da distância foi concluída com êxito por 23 dos 26 alunos participantes da pesquisa. Dessa forma, supomos que os conceitos trabalhados foram internalizados. Nesse sentido Jonassen (2007) infere que um conceito necessita de mais do que uma situação para ser internalizado. O autor ainda chama atenção para o fato de que numa única situação não se analisa só um conceito, ou seja, ela envolve vários conceitos implícitos que devem ser avaliados pelo professor, que, de acordo com Moreira (2011[a]), podem levar a novos caminhos que conduzem a outros tipos de aprendizagem.

As análises dos dados coletados, durante e após as situações propostas, evidenciam, em geral, um desempenho favorável dos alunos. Tal asserção pode ser corroborada pela análise do mapa conceitual final apresentado por esses alunos. De acordo com o tratamento dado aos dados coletados, analisando o mapa final, evidenciamos como os conceitos evoluíram na estrutura cognitiva dos alunos, considerando a interação do novo conhecimento com o conhecimento prévio relevante, o que caracteriza indícios de aprendizagem significativa.

Ressaltamos que o mapa conceitual nesse processo investigativo foi utilizado como instrumento de coleta em dois momentos distintos da pesquisa. No primeiro, a partir da análise do mapa, foi feita a identificação dos conhecimentos prévios relevantes ao tema, a fim de identificar os conhecimentos existentes na estrutura cognitiva dos alunos. O reconhecimento dos *subsunçores* auxiliou na condução e no desenvolvimento da *sequência didática*. Com o segundo mapa, realizamos uma análise qualitativa, tendo como objetivo identificar a evolução conceitual dos alunos após a aplicação da *sequência didática* em sala de aula, o que possibilitou espelhar por meio de Tabelas, os avanços conseguidos durante a intervenção.

No percurso investigativo, assim como foi feito na aplicação do mapa conceitual inicial, identificamos nos mapas finais construídos, a frequência com que os conceitos apareceram, os níveis hierárquicos de inclusividade e a quantidade de relações válidas entre os conceitos estabelecidas. O uso dos descritores objetivou avaliar a apropriação, o domínio e os avanços no campo conceitual do conteúdo, que ensejassem indícios de processos de *diferenciação* e de *reconciliação* conceitual. Na Tabela 4, apresentada a seguir, demonstramos a frequência com que os conceitos se fizeram presentes na construção final.

Tabela 4 – Conceitos, e respectivas frequências com as quais aparecem no mapa conceitual final

CONCEITOS	Alunos participantes																									
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A25	A26	TOTAL
Trig.																											25
Rel. met.																											24
Triang. ret																											21
Teo. Pit																											19
Cat. op																											21
Cat. adj																											21
Hip.																											21
Âng. 90º																											12
Sem. triâng																											15
Fórm.																											01
Raz. Trig																											23
Sen.																											23
Cos.																											23
Tg.																											24
Teo. Tales																											03
Proj. lados																											03
Tipos Δ																											03
Área Δ																											01
Perímetro Δ																											01
Altura Δ																											02
Regra de 3																											00

Fonte: o autor, 2019.

Onde se lê na Tabela 04:

Raz. Trig = razões trigonométricas	**Tipos** Δ **=** tipos de triângulos
Área Δ = área do triângulo	**Perímetro** Δ = perímetro do triângulo
Altura Δ = altura do triângulo	**Proj. lados =** projeção dos lados

De acordo com os dados da Tabela 4, que expõe as informações obtidas no segundo mapa, ou mapa final, foram identificados 6 conceitos a mais do que os evidenciados no mapa inicial. Trata-se dos *conceitos de razões trigonométricas, área e altura do triângulo retângulo, tipos de triângulos, perímetro e projeção dos lados*, ambos discutidos e teorizados no decorrer do desenvolvimento da *sequência didática*. Em outra instância, destacamos que a quantidade de conceitos ratificados e encadeados pelos alunos podem ser considerados um sinal evidente dos seus processos de *diferenciação* e de *reconciliação,* pois abrangeram os conteúdos trabalhados na intervenção. Também vale observar a frequência da citação dos conceitos por cada um dos alunos, em cada mapa final construído, conforme apresentado na Tabela 04, o que representa um avanço significativo enquanto presença nos níveis hierárquicos estabelecidos.

Corroborado por Novak e Gowin (1999), inferimos que a proposta de elaboração de mapas implicou que os alunos passassem a refletir sobre quais são os conceitos mais e menos inclusivos e que conceito deveria ser mais geral, o que, em nosso ver, implica um processo simultâneo de *diferenciação* e de *reconciliação* dos conceitos, que, por meio da participação ativa do aluno, pode ter culminado numa aprendizagem significativa.

De acordo com Novak e Gowin (1999) e Fontanini (2007), a construção de mapas pelos alunos traz diversas contribuições para o processo de aprendizagem. Segundo os autores, durante a construção, os alunos descobrem relações entre conceitos que antes não consideravam e assim constroem novos significados para eles. Nesse sentido, por meio das relações lineares e também cruzadas estabelecidas entre os conceitos nos mapas conceituais finais, inferimos que os alunos passaram a ter uma visão mais ampla e complexa dos encadeamentos e interligações conceituais envolvidas.

Novak e Gowin (1984) destacam ainda que a aprendizagem significativa de um conceito é um processo que não cessa, pois as novas interações do aluno com o conceito podem propiciar o estabelecimento de novas relações, ampliando constantemente sua compreensão a respeito do mesmo. Corroborando a abordagem, Ausubel, Novak e Hanesian (1980) salientam que toda aprendizagem que é produto de uma *reconciliação integradora* também tem como efeito uma posterior *diferenciação progressiva,* e vice-versa, dos conceitos e proposições, em que ambos os processos se retroalimentam.

Diante dos depoimentos dos autores, inferimos que o desenvolvimento da *sequência didática* fomentou a relevância que determinados conceitos representavam dentro do processo. Novak (1981) enfatiza que a questão central é que a aprendizagem eficiente de conceitos requer capacidade de explicação das relações entre conceitos. Nesse sentido, a classificação do nível de hierarquia possibilita configurar a sequência dos conceitos, como eles se comportam, dos mais inclusivos e gerais para os mais específicos e subordinados, e a relações hierárquicas que existem entre eles. A Tabela 5 apresenta os níveis hierárquicos, com base na classificação de Novak e Gowin (1984).

Tabela 5 – Classificação em níveis hierárquicos do mapa conceitual final.

Nível hierárquico	Alunos participantes																										
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A25	A26	TOTAL
Nível 00																											00
Nível 01																											02
Nível 02																											12
Nível 03																											12

Fonte: o autor, 2019.

Analisando a alteração de níveis hierárquicos emergentes dos mapas (inicial e final) construídos, identificamos, na construção final dos alunos, um maior nível hierárquico estabelecido entre os conceitos em relação aos construídos inicialmente, conforme pode ser visualizado por meio dos números apresentados na Tabela 5. Para justificar a asserção, podemos verificar que, no mapa conceitual inicial, de acordo com os critérios de Novak e Gowin (1984), 21 alunos construíram seus mapas no nível 1, e 5 alunos avançaram ao nível 2. Na construção final, de maneira geral, quase a totalidade de alunos modificou os níveis hierárquicos, ou seja, apenas 2 alunos permaneceram no nível 1; 12 alunos avançaram para o nível 2; 12 alunos concluíram seus mapas no nível 3. Houve, portanto, uma elevação considerável de hierarquia conceitual do assunto em relação ao início da investigação.

Lembramos que a Tabela 5 tem apenas caráter ilustrativo (qualitativo) acerca dos achados, a partir da análise dos mapas construídos pelos alunos. O exposto ilustra o nível hierárquico de conceitos encadeados por cada um dos alunos. Assim, o retrato dos dados fornecem pistas do quão significativa foi a *sequência didática* proposta, evidenciando progressivos níveis de *diferenciação* e de *reconciliação* dos conceitos trabalhados. Na identificação dos níveis hierárquicos dos mapas conceituais, visualizamos também a quantidade de relações válidas estabelecidas entre os conceitos. Os quantitativos (demonstrativos) dessas relações estão indicados na Tabela 6, a seguir.

Tabela 6 – Quantidade de relações válidas entre conceitos no mapa conceitual final

Relações entre conceitos	Alunos participantes																										
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A25	A26	TOTAL
	8	10	7	7	9	8	5	13	9	6	7	11	8	7	9	7	12	8	13	9	11	9	6	8	12	14	233

Fonte: o autor, 2019.

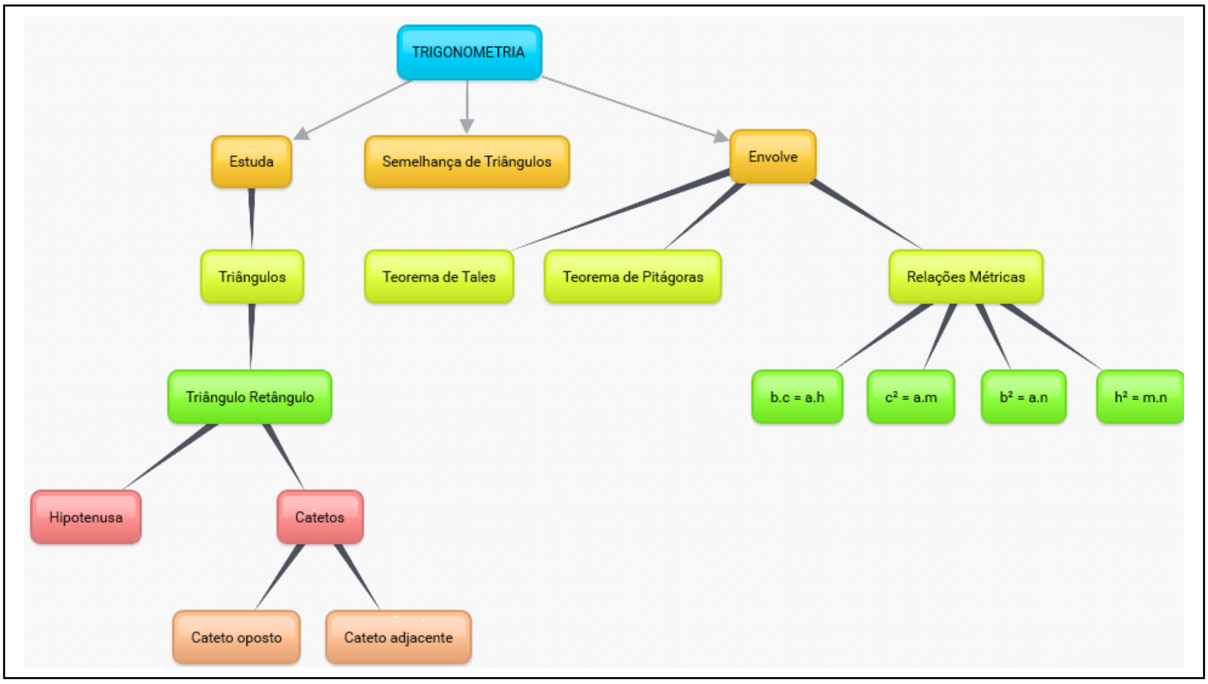
As relações válidas analisadas nos mapas conceituais finais, autenticadas por valores numéricos na Tabela 6, demonstram uma evolução significativa em relação às dos mapas conceituais iniciais. Essa evolução não significa, necessariamente, aperfeiçoamento da *diferenciação progressiva* dos conceitos, pois, como cita Novak (1981, p. 87), “a *diferenciação* cognitiva na aprendizagem significativa ocorre gradualmente, à medida que o aluno amadurece”. Considerando que a estrutura cognitiva de um aprendiz em certa área do conhecimento é constituída de conceitos e proposições, bem como, pela organização desses conceitos em sua mente, segundo Novak e Gowin (1999), Moreira e Buchweitz (1993) e Fontanini (2007), os mapas conceituais podem ser utilizados para representar a estrutura cognitiva desses alunos. Segundo os autores, a ferramenta permite ao professor avaliar o conhecimento conceitual do aluno, avaliar como ele organiza, hierarquiza, relaciona e diferencia os conceitos num determinado campo (tópico) de uma disciplina.

Observamos na construção do mapa inicial, a ausência de ligações cruzadas entre os conceitos. Na reaplicação da ferramenta, em número considerável de mapas, essas ligações estavam presentes, o que em nossa visão enseja que novos conceitos foram internalizados e inter-relacionados, num processo contínuo de diferenciação e reconciliação conceitual. Segundo Novak e Gowin (1999), a evidência do estabelecimento dessas ligações é uma forma importante de identificar se houve incorporações significativas entre um e outro segmento de hierarquia conceitual.

Nas Figuras, 43, 44, 45 e 46, apresentamos mapas construídos pelos mesmos alunos, analisados na fase inicial, a fim de representar o número de conceitos elencados, a quantidade de níveis hierárquicos imbricados, bem como, a quantidade de relações válidas feitas nessa fase final. Destacamos que escolhemos mapas elaborados pelos mesmos alunos que produziram os transcritos na análise prévia, para analisar melhor sua evolução conceitual, é com isso, atestarmos os indicativos de diferenciação e reintegração conceitual, implícitos ao processo. Nessa perspectiva, salientamos que os mapas finais foram elaborados com o apoio da ferramenta *Bubbl.us* (*Brainstorming made simple*) e encaminhados ao pesquisador, por meio do aplicativo *WhatsApp.*

Antes do uso dos recursos, os alunos foram devidamente orientados pelo pesquisador acerca de quais procedimentos seriam necessários para que os aplicativos fossem usados de forma a maximizarem o produto final de suas construções. Realizada a tarefa, os aprendizes o encaminharam para que fossem armazenados e, posteriormente, analisados. A seguir, apresentamos alguns dados comparativos relacionados ao uso da ferramenta “mapa” na fase final da investigação.

Figura 43 – Mapa conceitual final construído pelo aluno A2.



Fonte: o autor, 2019.

Conforme já destacado, na fase final de construção do mapa, os alunos tiveram como parceiro a ferramenta *Bubbl.us,* que lhes foi devidamente apresentada pelo pesquisador. Segundo relatos dos alunos, o uso do *software* permitiu-lhes organizar melhor as ideias, partindo da ideia âncora (central) para as mais específicas (subordinadas) de forma sequencial, dado seu caráter manipulativo e dinâmico.

Durante a intervenção, os alunos se relacionaram de maneira natural com o recurso disponibilizado. Alguns dos participantes dispensaram o uso dos *notebooks* e *tablets* fornecidos pelo interventor e utilizaram seus próprios telefones celulares para a execução da tarefa.

Feita a observação, destacamos que as informações que emergiram do segundo mapa produzido pelo A2, quando confrontadas com informes extraídos do mapa conceitual inicial confeccionado por esse mesmo aluno, corroboram nossa percepção de que as atividades propostas e desenvolvidas no decorrer da intervenção, com base na aplicação da *sequência didática,* ajudou os alunos a evoluírem nos seus conhecimentos e concepções acerca do tema, revelando indícios de *diferenciação* e de *reconciliação* dos conceitos trabalhados. Para explicitar nossas observações, apresentamos na Tabela 7, os valores relacionados aos principais descritores observados, segundo a perspectiva de Novak e Gowin (1980).

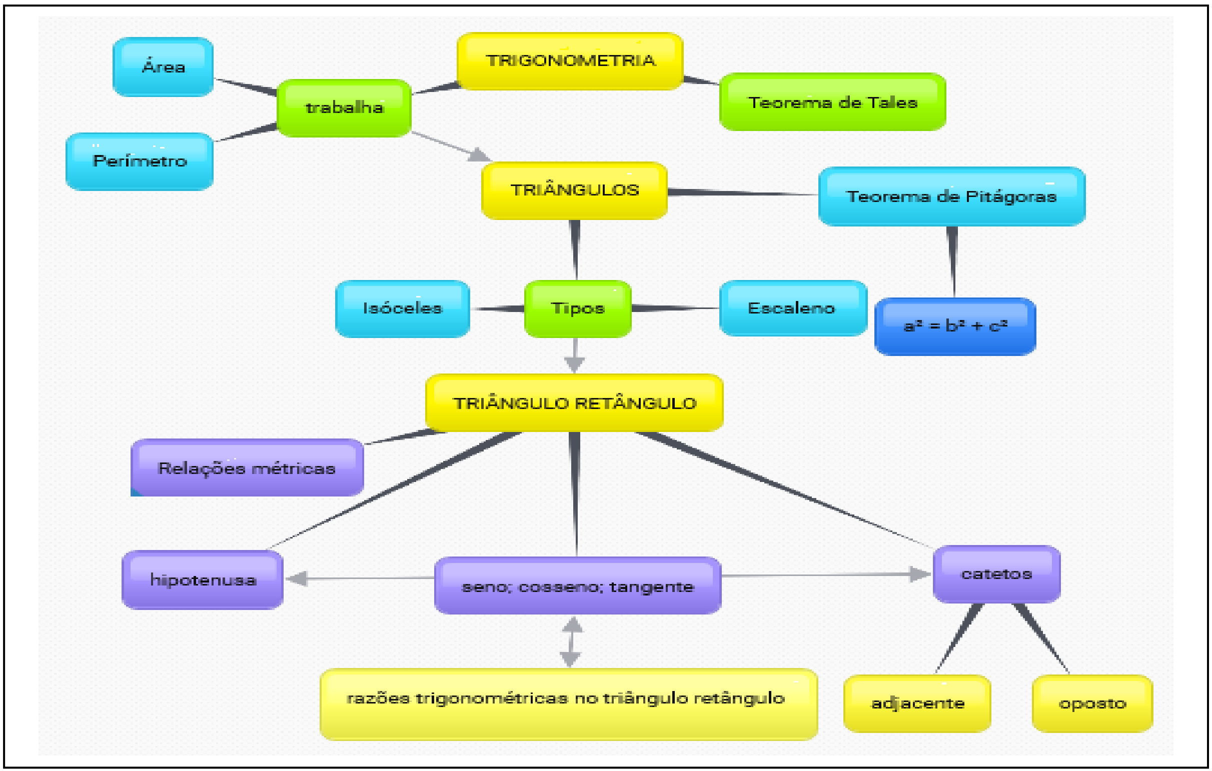
Tabela 7 – Idicadores da evolução conceitual de A2

Mapas construídos	Número de conceitos relacionados	Número de níveis hierárquicos atingidos	Número de relações válidas estabelecidas
Inicial	7	01	5
Final	**11**	**03**	**10**

Fonte: o autor, 2019.

Analisando os dados comparativos explicitados na Tabela 7, constatamos substancial evolução dos valores numéricos relacionados aos descritores tomados com base nas concepções de Novak e Gowin (1980). Segundo os autores, tais indicativos (aumento dos números consideráveis entre uma aplicação e uma reaplicação) estão associados a níveis de aprendizagem elevados, o que leva a concluir que a aquisição, a organização e retenção de conhecimentos por parte desse aluno evoluiu de acordo com as proposições realizadas dentro e fora da sala de aula, configurando-se, assim, numa aprendizagem significativa. Na mesma linha, apresentamos, na Figura 44, o mapa construído por A8.

Figura 44 – Mapa conceitual final construído pelo aluno A8



Fonte: o autor, 2019.

Dos mapas analisados para essa amostragem, o da Figura 44 chamou atenção devido ao grau de articulação e de encadeamento entre os conceitos suscitados. Nessa Figura, é possível observar que A8 utilizou setas duplas, o que, segundo Moreira (1999 e 2004), é uma clara evidência da percepção do processo de *reconciliação* entre os conceitos imbricados, tal evidência não se fez presente na construção do mapa inicial. Na mesma linha, esse aluno também utiliza setas para indicar conceitos, que, na sua visão, estariam num mesmo nível hierárquico, o que denota sua compreensão em relação à *diferenciação* dos conceitos, conforme observado na penúltima linha do mapa apresentado. Corroborando os dados elencados, na Tabela 8, podemos constatar a variação entre os valores numéricos relacionados aos descritores avaliados. Tais oscilações de padrões podem ser tomados segundo Novak e Gowin (1980), como indicativos de aprendizagem significativa desse aluno.

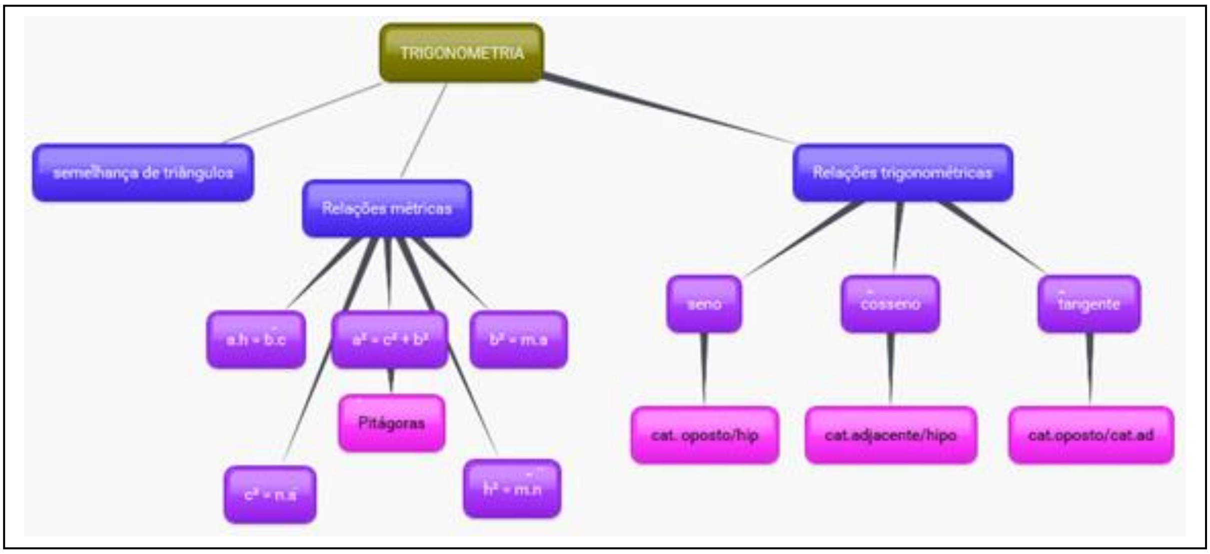
Tabela 8 – Indicadores da evolução conceitual de A8

Mapas construídos	**Número de conceitos relacionados**	**Número de níveis hierárquicos atingidos**	**Número de relações válidas estabelecidas**
Inicial	9	01	2
Final	**14**	**03**	**13**

Fonte: o autor, 2019.

De acordo com a Tabela 8 construída, a variação numérica entre os dados coletados inicialmente e os elencados a partir da análise do mapa conceitual final, conforme já observado, houve um acréscimo significativo no número de conceitos, níveis hierárquicos e relações válidas comprovadas de acordo com os critérios estabelecidos. Logo, é possível concluir que A8 ampliou seus conhecimentos em relação às *razões trigonométricas no triângulo retângulo,* o que nos permite inferir que esse aluno aprendeu significativamente o conteúdo. Na sequência, apresentamos, na Figura 45, o mapa conceitual final construído por A15.

Figura 45 – Mapa conceitual final construído pelo aluno A15



Fonte: o autor, 2019.

Ao observar o mapa final de A15, a *priori,* podemos enxergar incoerências em relação às ligações realizadas entre os conceitos, a citar, a relação direta entre o conceito de trigonometria e as relações métricas. No entanto, tendo em vista que as relações de subordinação, de superordenação e de combinação conceitual de ideias e de proposições ocorrem na estrutura cognitiva do aprendiz, que, por sua vez, é única, quem define a hierarquização refletida no mapa é o próprio construtor. Para justificar nossa observação, apropriamo-nos das concepções de Moreira (2017), que assevera que não há mapa conceitual certo ou errado. Para ele, o que diferencia um mapa de um e de outro aluno é a forma como organizam e hierarquizam suas ideias, proporcionando uma leitura de cima para baixo ou de baixo para cima, explorando relações entre todos os conceitos envolvidos, promovendo a *reconciliação integradora* e evidenciando a *diferenciação progressiva.*

Nesse caso, seguindo as orientações de Moreira (2017), fizemos a leitura do mapa de baixo para cima, para nos aproximarmos da compreensão organizacional do mapa. Nessa investida, visualizamos no mapa construído relações pertinentes e importantes entre os conceitos relacionados. Para fundamentar o exposto, na Tabela 9, apresentamos os dados coletados nos dois momentos.

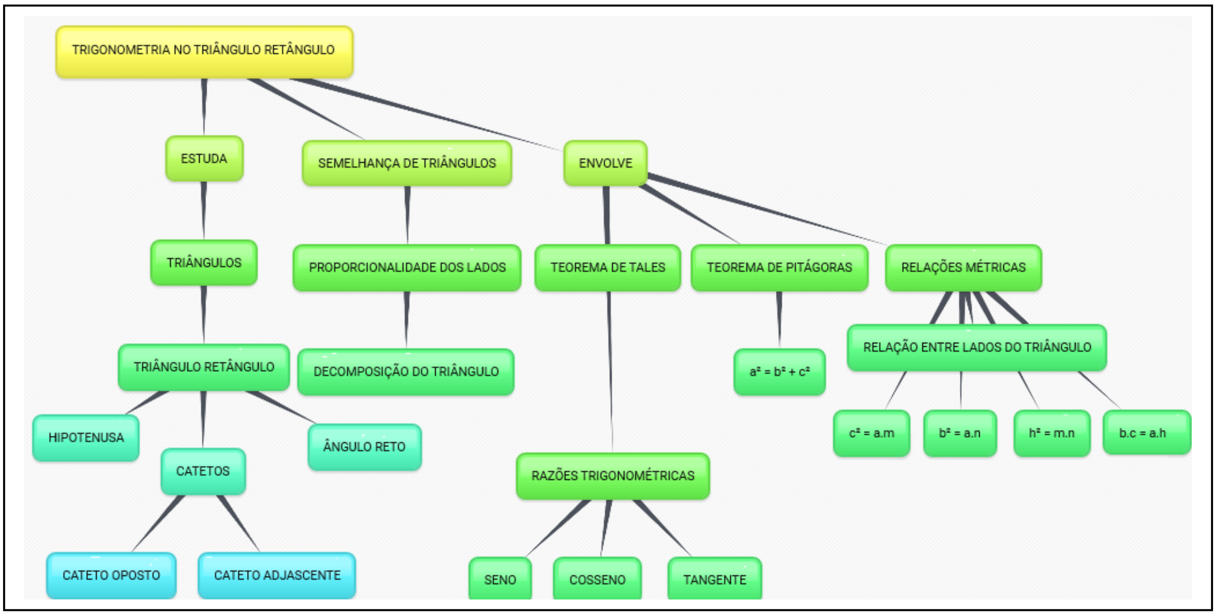
Tabela 9 – Indicadores da evolução conceitual de A15

Mapas construídos	**Número de conceitos relacionados**	**Número de níveis hierárquicos atingidos**	**Número de relações válidas estabelecidas**
Inicial	8	01	5
Final	**13**	**03**	**9**

Fonte: o autor, 2019.

Assim, como nas comparações anteriores, os dados parecem refletir avanços na compreensão dos conceitos trabalhados também por A15. Nesse sentido, Moreira (2004, 2017) lembra que um mapa conceitual não é um diagrama estático, isto é, ele pode ser constantemente alterado pelo autor, conforme adquire novas informações e reorganiza as relações conceituais já conhecidas. As informações captadas da construção dos mapas de A15 refletem apenas o momento vivenciado pelo aluno no período em que foi investigado. Considerando a melhora dos números dos descritores, há evidências de que se apropriou de uma série de novos conceitos, que caracterizam aprendizagens superiores. Na Figura 46, analisamos os dados referentes a A26.

Figura 46 – Mapa conceitual final construído pelo aluno A26



Fonte: o autor, 2019.

Semelhantes à estrutura cognitiva, os mapas conceituais são arquitetados hierarquicamente, como explicitado no mapa construído por A26. Observamos que o autor alinhou os conceitos por cores, num mesmo nível, indicando indícios de *diferenciação*. Apesar de na construção não aparecerem palavras de ligação, observamos uma organização no encadeamento dos conceitos, a qual nos permite duas leituras: uma, de cima para baixo; outra, de baixo para cima. Dessa forma, baseado na concepção de Moreira (2017) atesta-se as relações de *diferenciação* e de *reconciliação* entre os conceitos hierarquizados, “com os conceitos mais inclusivos, mais gerais, no topo do mapa, e os conceitos mais específicos, menos gerais arranjados hierarquicamente abaixo” (NOVAK; CAÑAS, 2008, p. 13, tradução nossa). Na Tabela 10, apresentamos os dados das duas construções dos mapas por A26.

Tabela 10 – Indicadores da evolução conceitual de A26

Mapas construídos	**Número de conceitos relacionados**	**Número de níveis hierárquicos atingidos**	**Número de relações válidas estabelecidas**
Inicial	6	01	5
Final	**14**	**03**	**14**

Fonte: o autor, 2019.

A análise da estrutura dos mapas e dos dados comparativos da Tabela 10 nos permitiu identificar a evolução da apropriação dos conceitos pelo aluno, no que se refere à construção, à representação, às relações conceituais e aos níveis hierárquicos encadeados na diagramação. Tomando como referência a totalidade dos dados de ligações e relações feitas pelo aluno entre os mapas, consideramos haver índices progressivos de melhoria da aprendizagem.

De acordo com as concepções de Novak e Gowin (1999), os mapas conceituais construídos pelos alunos, de alguma forma, aproximam-se do que eles mantém ancorado em suas estruturas cognitivas, numa determinada área do conhecimento. Os autores sugerem que esse tipo de hierarquia utilizada nos mapas parece refletir influências da organização dos processos de ensino e de aprendizagem aos quais foram submetidos.

Na elaboração final do mapa, evidenciamos que os alunos progrediram, evoluíram em relação aos primeiros mapas construídos, denotando maior *diferenciação* entre os conceitos por meio da hierarquização, bem como, apresentando níveis de *reconciliação* elevados por meio de ligações cruzadas entre os conceitos. Nessa fase final, os mapas configuram-se como ferramentas essenciais para esse pesquisador, possibilitando-lhe a identificação da evolução conceitual das estruturas cognitivas dos alunos, após a aplicação da *sequência didática,* ensejando a identificação de níveis robustos de apropriação e de retenção de conhecimentos.

Ainda, aludindo ao último instrumento de coleta de dados, identificamos nos mapas dos alunos, elementos relevantes nas relações construídas, que ensejam a apreensão e a retenção de um conjunto de conceitos que se inter-relacionam de acordo com os mapas de A2, A8, A15 e A26. Ao retroagirmos aos posicionamentos dos teóricos que discutem as relações entre a *Engenharia Didática* e a *Teoria de Aprendizagem Significativa*, conseguimos confirmar um conjunto de elementos que podem ser considerados como sinalizadores da aprendizagem significativa (níveis hierárquicos definidos, ligações lineares e cruzadas entre conceitos), nos mapas conceituais construídos pelos alunos após o desenvolvimento das atividades propostas na *sequência didática*.

Reiteramos que, nesta tese, para analisar as informações correlatas à elaboração e à construção desses mapas conceituais, partimos dos princípios ausubelianos de *diferenciação progressiva*, segundo o qual, os alunos devem aprender um conteúdo inicial (conceitos e ideias) e, a partir desse conteúdo, associando-o progressivamente ao novo conteúdo, fazer uma distinção de detalhes entre esses conceitos. E da *reconciliação integradora*, em que os conceitos originais buscam associações (reconciliadoras integrando significados) entre si, interligando-se de forma expansiva e sistemática. A análise desses princípios permitiu identificar possíveis sinais de avanços no *continuum* aprendizagem significativa – aprendizagem memorística, assim como possibilitou perceber a influência da *sequência didática* utilizada, que privilegiou o engajamento dos alunos como protagonistas da construção de seus conhecimentos.

Por fim, destacamos a capacidade de trabalhar com o concreto e o abstrato, numa tentativa de aproximação do uso da Matemática do cotidiano com a Matemática escolar. A ação teve como propósito, contextualizar conteúdos estudados na escola, relacionando-os, em especial, com os acontecimentos diários da vida dos alunos.

A avaliação aqui explicitada tem caráter qualitativo, porque, em específico, analisamos características de uma *sequência didática* que visou facilitar os processos de *diferenciação progressiva* e de *reconciliação integradora* dos conceitos inter-relacionados, aos processos de ensino e de aprendizagem das *razões trigonométricas no triângulo retângulo*. Em sua generalidade, a *sequência didática* proposta foi uma experiência de ensino, baseada na crença do pesquisador, que utilizou ideias de autores como: Artigue, Pais, Ausubel, Novak, Jonassen, Moreira, entre outros. Tais ideias destacam que o uso de recursos de ensino variados para ensinar um mesmo conteúdo favorece o desenvolvimento da aprendizagem; as relações interpessoais; o crescimento matemático, entre outros aspectos, ensejando potenciais indícios de aprendizagem significativa, quiçá, outras aprendizagens mais complexas, desenvolvidas a partir da aquisição e da construção de conhecimentos em determinada área do saber.

4.2 Síntese dos resultados

A partir da compreensão do enredamento exposto na seção anterior, buscamos responder ao nosso primeiro objetivo específico, que foi *identificar os conhecimentos prévios dos alunos participantes da pesquisa, visando nortear o encadeamento da sequência didática.* Para atingir tal objetivo, foi de fundamental importância, a aplicação de um teste de conhecimentos inicial e a construção de um mapa conceitual inicial. Cada um com suas características e especificidades revelou-nos indícios significativos dos conhecimentos prévios dos pesquisados.

A partir das concepções prévias advindas dos questionamentos iniciais, corroborados pela aplicação do teste de conhecimentos e pela construção do mapa conceitual, inferimos que os alunos demonstraram conhecimentos prévios elementares acerca de: *retas paralelas e perpendiculares; ângulo; conceituação e caracterização do triângulo retângulo; relações métricas no triângulo retângulo; semelhança entre triângulos retângulos, teorema de Pitágoras e razões trigonométricas no triângulo retângulo; proporcionalidade; além dos tipos de triângulos mais recorrentes: escaleno, retângulo e isóscele*. Tais conceitos, elencados a partir da análise, emergentes da Categoria 4.1.1, atestam os conhecimentos ancorados nas estruturas cognitivas daqueles aprendizes.

No entanto, a presença dos conhecimentos identificados não garantiria que os passos seguintes da aplicação da *sequência didática* fossem exitosos, pois os interagentes apresentavam conhecimento desorganizado (não hierarquizado). Então, foi necessário um trabalho de organização de suas estruturas cognitivas, no sentido de elucidar como tais conceitos estavam inter-relacionados. Observamos, também, mediante a proposição das atividades, que os pesquisados tiveram dificuldades em identificar e relacionar o ângulo com lados do triângulo, bem como, em identificar e visualizar relações de proporcionalidade, levando-nos a, no decorrer da investigação, revisitar diariamente o assunto. Feitas as identificações, em síntese, podemos considerar que:

- Os conhecimentos prévios relevantes demonstrados inicialmente pelos alunos influenciaram significativamente no desenvolvimento da *sequência didática*, tornando-a potencialmente significativa e contribuindo para uma nova postura na ação pedagógica do próprio pesquisador.

- A identificação dos conhecimentos prévios e dos conhecimentos em ação nas situações propostas resultou numa significativa mudança de postura dos alunos.

A partir das pontes construídas entre os conhecimentos, auxiliados pelo professor, percebemos que os alunos sentiram-se mais desinibidos, o que, consequentemente, melhorou a participação durante as aulas. Acreditamos, portanto, que a variedade de recursos e estratégias de ensino utilizadas, como preconiza Jonassen (1996, 2007), influenciaram, de modo especial, na maneira como os alunos, após um determinado tempo de trabalho, utilizaram mais de uma forma de verem o mesmo conteúdo, apropriaram-se dos conceitos trabalhados e passaram a significar tanto as relações implícitas, quanto as explícitas.

Corroborando nossa percepção, Ausubel, Novak e Hanesian (1980, p. 335) destacam que “o professor pode somente apresentar ideias de modo tão significativo quanto possível. A tarefa de organizar novas ideias num quadro de referência pessoal só pode ser realizada pelo aluno”. Nessa linha argumentativa, de acordo com Ausubel (2000) e Jonassen (2007), com o auxílio da conexão entre as dimensões e suas especificidades, a aprendizagem acontece quando o aluno recebe as informações, assimila-as, relaciona-as com seus conhecimentos prévios, organiza-as e conecta-as aos seus mapas mentais dando-lhes significado, ocorrendo assim à aprendizagem significativa, que possibilita ao aluno aplicar sua aprendizagem ao seu contexto cotidiano.

Dadas às inúmeras nuances e variáveis envolvidas no processo de reconhecimento de indícios de aprendizagem dos alunos, como forma de sintetizar, mas não de encerrar a reflexão em torno da metodologia utilizada, entendemos que os resultados da pesquisa desencadearam asserções de valores substanciais quanto ao uso de recursos de ensino diversificados, por meio da aplicação da *sequência didática*. Tais indícios nos direcionam a responder o segundo objetivo específico da pesquisa, que foi *avaliar como o uso de variados recursos de ensino pode alterar a percepção dos alunos, desencadeando novos sentidos, significados,* *que potencializam os processos de aquisição e de construção de conhecimento significativo.*

Tomando como referência o envolvimento dos alunos, atestado na contextualização da Categoria 4.1.2, podemos inferir que a metodologia da *Engenharia Didática*, conjugada pela teoria de Ausubel e fomentada pelas concepções de Jonassen, favoreceu a concentração dos alunos, sua participação individual e coletiva, seu envolvimento em tarefas dentro e fora da sala de aula, sua criatividade, bem como, sua capacidade de argumentação, o levantamento de hipóteses, a reflexão, o contato com o fazer prático, a oportunidade de estarem mais preparados para resolver os problemas do cotidiano. Ademais, auxiliou na transformação da sala de aula num laboratório, que contribuiu para o crescimento pessoal e cognitivo dos alunos, colocando-os como seres ativos dos processos de ensino e de aprendizagem.

Os depoimentos dos alunos corroboraram de maneira substancial os recursos utilizados, com os quais mais se identificaram durante o desenvolvimento da *sequência didática*. Nas argumentações dos aprendizes, identificamos não só o gosto pelas atividades, mas também o que consideraram mais relevante nas tarefas, que ensejaram e viabilizaram os processos de ensino e de aprendizagem.

Para corroborar a descrição analítica acima, destacamos algumas respostas obtidas da entrevista com os alunos da turma, após o encerramento da última atividade. Perguntamos aos alunos, qual o recurso de ensino e qual a atividade que mais lhes despertou interesse e se esta teria sido significativa para eles. Também procuramos saber se eles viam a possibilidade de utilização de alguma situação que envolvesse os conceitos trabalhados na intervenção e se os recursos utilizados contribuíram para a melhoria de sua aprendizagem. Nesse sentido, os alunos responderam:

> *[A7] O recurso que mais gostei foi o da construção e utilização do Astrolábio, nunca tinha construído nada na escola que eu pudesse utilizar fora dela. Sem dúvida isso vai ficar gravado na minha memória. Todas as atividades foram legais, mas essa nunca vou esquecer. Passei a olhar para as construções e enxergar coisas que antes eu não via [...]*

> *[A11] Foi tudo muito legal, fizemos muitas coisas legais mesmo! Confesso que no início achei que fosse ser chato. Mas as coisas foram*

> *acontecendo e fui começando a entender um monte coisas, principalmente nas atividades de campo. Se for para escolher as atividades que mais gostei, posso dizer que foram as atividades da sombra das hastes e a testagem do Astrolábio.*
>
> *[A26] Para mim todas as atividades foram importantes, porque uma completava a outra, mas se for para escolher, escolho as atividades práticas porque nos tiraram da zona de conforto. Estávamos acostumados a só fazer as coisas na sala de aula, e de repente o senhor aparece com um monte de coisas novas que poderíamos fazer. Para mim foi uma experiência incrível. Já fiz experiências com o Astrolábio até lá em casa e vejo também que posso utilizar a trigonometria em muitas outras coisas do meu dia a dia.*

As asserções dos alunos evidenciam que a utilização de mais de um recurso para ensinar o mesmo conteúdo impactou positivamente a construção dos seus conhecimentos. De acordo com os posicionamentos, houve maior identificação com as atividades práticas. Nessa perspectiva, supomos que a relação entre o fazer prático na escola favoreceu a ancoragem de *subsunçores*, que, de alguma forma, ampliaram a percepção dos alunos acerca da utilização dos conceitos trabalhados para além dos muros da escola. Diante dos fatos apresentados, é pertinente considerar alguns segmentos que potencializaram ainda mais a aquisição e a construção de conhecimentos, como:

- A participação dos alunos: através dos questionamentos entre os pares e o professor pesquisador, foi possível estabelecer relações com situações do cotidiano do aluno, fazendo com que ele se sentisse membro ativo do processo.

- Os procedimentos: abandonamos os processos mecânicos e valorizamos situações vivenciadas no dia a dia dos alunos, que desencadearam novos significados ao conteúdo estudado.

- A promoção da relação horizontalizada entre professor pesquisador e alunos favoreceu uma relação de parceria e cumplicidade, abrindo espaço para a leitura e a releitura do conteúdo estudado e inferindo novas percepções da sua aplicabilidade.

Diante do contexto apresentado, podemos inferir que a *sequência didática* pautada na utilização de diferentes recursos de ensino pode ter propiciado aos alunos, muito além de uma experiência singular de ensino, ou seja, propiciou uma experiência significativa de aprendizagem. Para Ausubel, Novak e Hanesian (1980) e Jonassen (2007), é preciso que o aluno tenha oportunidade de contatar com o conceito em diversos contextos, para que consiga extrair dele, os atributos essenciais que o caracterizam.

Nessa perspectiva, por meio das atividades trabalhadas, que são apenas uma ideia do que pode ser feito, procuramos dar conta do que preconizam os autores citados. A *sequência didática* que propomos não significa uma receita a ser seguida, mas, sim, um caminho. Muitas outras podem ser desenvolvidas. Outras metodologias podem ser exploradas e utilizadas em busca da motivação dos estudantes e da melhor forma de atingi-los positivamente, em termos de conhecimento.

Considerando que o conhecimento do aprendiz se estrutura a partir da interação entre novos conhecimentos e conhecimentos já internalizados, e que o aprendiz desenvolve um mapeamento mental para evoluir dentro de um processo de conceitualização, que é o conhecimento. Ao pesquisar os conhecimentos prévios e elaborar situações de aprendizagem nas quais os alunos passaram a ser os protagonistas das ações, foi-lhes dada a oportunidade de visualizarem esses mapeamentos, para que auxiliassem na progressão de encaminhamentos para uma aprendizagem significativa, revelando indicadores contínuos de *progressão* e de *reconciliação* dos conceitos trabalhados.

Nesse sentido, por meio de diferentes recursos e estratégias diferenciadas de ensino, que nos auxiliaram durante os processos de ensino e de aprendizagem, buscamos identificar, no decorrer da intervenção, indícios que nos permitissem responder ao terceiro objetivo específico da pesquisa, que buscou *analisar os indicativos de diferenciação progressiva e de reconciliação integradora dos alunos, relacionados ao tema abordado na sequência didática.*

O processo de análise levou em conta comprovações emergentes dos instrumentos de coleta de dados utilizados, assim como algumas percepções do pesquisador. Ao analisar a forma como os conceitos estavam encadeados em suas estruturas cognitivas, também percebemos alguns indicativos de *diferenciação progressiva* e de *reconciliação integradora*, relacionados ao tema.

Destacamos que, durante as atividades realizadas em campo com o Astrolábio, tanto a *diferenciação progressiva* quanto a *reconciliação integradora* puderam ser evidenciadas, pois, dentre as razões trigonométricas conhecidas pelos alunos, eles descartaram duas e permaneceram com aquela que lhes parecia mais factível ao desenvolvimento da atividade, utilizando o ângulo de mirada e a distância horizontal do observador até o objeto e, a partir dos dados, efetuaram seus cálculos, utilizando apenas a razão *tangente*.

Na mesma linha, ressaltamos a transposição de conceitos teóricos para situações reais (elaboração de situações-problema); tomada de decisões a respeito de quais seriam as razões trigonométricas a serem usadas em cada atividade proposta; hierarquização de conceitos por meio da elaboração de mapas conceituais. Em outro extremo, destacamos que a reconciliação também foi evidenciada ao refutarem a utilização das razões *seno* e *cosseno* em detrimento da utilização da razão *tangente*, para atingirem de forma eficaz a resolução da maioria das problemáticas apresentadas.

Em face do exposto, inferimos que os exemplos destacados são indicativos robustos dos princípios ausubelianos, porém não foram os únicos. No segmento da *diferenciação progressiva*, por exemplo, ainda podemos destacar:

- Os conhecimentos prévios identificados: retas paralelas e perpendiculares; ângulo; conceituação e caracterização do triângulo retângulo; relações métricas no triângulo retângulo; semelhança entre triângulos retângulos; teorema de Pitágoras e razões trigonométricas no triângulo retângulo; proporcionalidade; além dos tipos de triângulos mais recorrentes: escaleno, retângulo e isóscele, que, por si só, já caracterizam indicativos de *diferenciação progressiva* de conceitos pelos alunos.

- Uso das projeções dos lados do triângulo retângulo para chegar às relações métricas do triângulo.

Da mesma forma, destacamos, ainda, alguns indicativos de *reconciliação integradora*, identificados no percurso:

- Os conhecimentos prévios destacados anteriormente.

- O uso da semelhança entre triângulos, para inferir a constância das razões trigonométricas *seno*, *cosseno* e *tangente*.

- A utilização das constantes de proporcionalidade entre os lados do triângulo retângulo, para compreender e aplicar as razões trigonométricas.

- A forma hierárquica de organização dos mapas conceituais, inicial e final, assim como, os níveis de inclusividade atingidos pelos alunos na elaboração dos mapas são indicativos coerentes e consistentes de que durante os processos de ensino e de aprendizagem do conteúdo, os princípios de *diferenciação* e de *reconciliação*, de maneira implícita ou explícita, ocorreram.

Vale destacar que estivemos atentos às inferências e proposições que os alunos pudessem evidenciar, à forma como estavam pensando e analisando as atividades propostas na *sequência didática*, se remeteriam aos indicativos de processos de *diferenciação* e de *reconciliação*, preconizados por Ausubel (1968, 2000, 2003). Por meio desses indicativos, que não são os únicos, é possível inferir que a metodologia utilizada contemplou os aspectos conceituais, procedimentais e atitudinais relacionados ao ensino das *razões trigonométricas no triângulo retângulo*, o que enriqueceu a abordagem e potencializou a aprendizagem.

Concluímos que depois de percorridas as etapas da experiência de ensino, que foi permeada pela análise constante de como ocorre a organização do conhecimento por parte dos alunos, em termos de *diferenciação progressiva* e *reconciliação integradora*, ensejamos ter levantado informações suficientes, que nos permitiram responder aos objetivos propostos para a investigação. Para tal, estimulamos constantemente a troca de significados, entendendo que a maneira de auxiliar os alunos na organização de seus conhecimentos é evidenciar-lhes o sentido de que “aprender o significado de um dado conhecimento implica dialogar, trocar, compartilhar e, por vezes, estabelecer compromissos” (NOVAK; GOWIN, 1984, p. 36).

Em face das observações acerca das variáveis que circundaram o desenvolvimento da *sequência didática* trabalhada, concebemos, também, ter levantado elementos suficientes para responder à questão que norteou essa investigação que foi *quais características da sequência didática facilitam os processos de diferenciação progressiva e de reconciliação integradora dos conceitos das razões trigonométricas no triângulo retângulo pelos alunos?*

Analisando os resultados emergentes que foram discutidos nessa tese, inferimos que as características da *sequência didática* que facilitaram os processos de *diferenciação* e de *reconciliação* pelos alunos em relação ao conteúdo estudado têm origem e estão fundamentadas no uso de recursos diferenciados de ensino. A *sequência didática* proposta priorizou a participação individual e coletiva do aluno, seu envolvimento em tarefas dentro e fora da sala de aula, sua criatividade; o levantamento de hipóteses, a reflexão, o contato com o fazer prático, a relação do conteúdo com situações-problema do cotidiano. Nessa linha, consideramos como características facilitadoras dos princípios relacionados ao conteúdo:

- O uso e o manuseio de material concreto, que, segundo nossa avaliação, estimularam a autonomia, a coletividade, a criatividade e as características perceptivas, que, consequentemente, encorajaram os alunos a conjecturar, apresentar ou refutar hipóteses que favoreceram os processos de *diferenciação* e de *reconciliação* dos conceitos.

- A proposição de situações-problema que desafiaram os alunos a pensar, para que pudessem *diferenciar* os conceitos trabalhados e, consequentemente, os *reconciliassem* num processo contínuo de interação cognitiva.

- A participação do aluno por meio de questionamentos entre seus pares e o professor pesquisador, estabelecendo pontes entre situações vivenciadas no cotidiano e conceitos relacionados ao tema, que, progressivamente, foram *diferenciados* e *reconciliados*, facilitando os processos de retroalimentação.

- Por meio das atividades os alunos foram instigados a construírem os conceitos, sendo negligenciados os procedimentos mecânicos e valorizadas as situações vivenciadas no seu dia a dia, o que desencadeou novos significados ao conteúdo em estudado.

Dada nossa experiência de ensino com a utilização da *sequência didática*, supomos que as características elencadas potencializam a capacidade do aluno em agir, refletir e atuar em relação ao conteúdo estudado, ampliando aspectos de sua formação cultural, social e de trabalho, facilitando, consequentemente, os processos de *diferenciação progressiva* e de *reconciliação integradora* das relações conceituais da área do conhecimento. Nesse sentido, também acreditamos que a *sequência didática* com tais características, favoreceu o gosto dos alunos pela Matemática ao perspectivar a busca da compreensão da realidade. Essa, para além da facilitação da compreensão do conteúdo, procurou valorizar a capacidade de expressão do eu do aluno, de compreensão do outro, incluindo a leitura de todos os gêneros e a compreensão de fatos e fenômenos de aprendizagens anteriores.

Nesse eixo, entendemos que as características destacadas anteriormente, corroboraram para a capacitação de argumentação dos alunos, por meio da diversidade de recursos de ensino utilizados, permitiram aos alunos analisar e articular as informações adquiridas de diversas formas. Por fim, da análise dos resultados, concluímos que foi essencial para esse pesquisador, a aproximação da *Metodologia da Engenharia Didática* ancorada aos pressupostos da *Teoria da Aprendizagem Significativa*, para o desenvolvimento e aplicação da *sequência didática* ao permitirem:

- Trabalhar o ensino das razões trigonométricas com recursos diversificados, como: os tradicionais (quadro, papel e lápis); materiais concretos variados (madeira, tesoura, papel cartão, hastes, trena, corda, martelo, etc.); os informáticos (computador, *tablet*, telefone celular, softwares (*GeoGebra, Bull.us*, aplicativos como *Whatssapp*).

- Utilizar estratégias de ensino diversas como: aula expositiva, trabalho em grupo, leitura, aula de campo, construção colaborativa, dinâmicas em grupo, uso de ferramentas cognitivas digitais.

- Organizar as atividades por meio de roteiros de trabalho previamente planejados, nos quais privilegiamos a construção do conhecimento dos alunos, por meio de relações coerentes, consistentes e articuladas.

- Estimular e motivar os alunos a aprenderem, utilizando atividades práticas, com o uso de recursos diferenciados, não habituais na realidade em que foi realizada a pesquisa.

- Conduzir os alunos a perceberem a aplicabilidade Matemática, especificamente, das *razões trigonométricas*, por meio de suas observações práticas com o uso de experimentações manipulativas, favorecendo o raciocínio investigativo, a percepção das novas propriedades, a inter-relação entre os conceitos que possibilitou a compreensão do conhecimento estudado, ancorados nos princípios da *diferenciação progressiva* e da *reconciliação integradora*.

- Auxiliar os aprendizes a formular conclusões por meio de observações feitas, do raciocínio lógico e da argumentação, possibilitando a interligações entre os conhecimentos prévios dos alunos obtidos de suas vivências, com a Matemática escolar, que, por sua vez, influenciou o desenvolvimento do raciocínio indutivo com generalizações, a partir de conceitos mais específicos.

- Promover discussões após cada atividade de construção do conhecimento realizada, favorecendo a trocas de ideias, orientando, reorientando e diferenciando conceitos que estivessem num mesmo nível de inclusividade, evidenciando propriedades importantes e corrigindo de forma apropriada os possíveis desvios de percepção.

- Evidenciar na análise dos resultados, a evolução conceitual sobre o tema: *razões trigonométricas no triângulo retângulo*.

A justificativa para as afirmações é baseada na observação participativa do interventor durante o desenvolvimento das atividades da *sequência didática*, as respostas dos alunos aos testes de conhecimentos utilizados em dois momentos distintos, a construção dos mapas conceituais, inicial e final, e dos registros dos estratos de produção e desenvolvimento de situações-problema realizadas pelos próprios alunos.

Considerando os pressupostos da *Metodologia da Engenharia Didática*, preconizados por Artigue (1996) e os princípios que suportam a *Teoria da Aprendizagem Significativa*, conforme descritos por Ausubel (1968, 2000, 2003), concluímos que a *sequência didática* proposta acerca das *razões trigonométricas no triângulo retângulo* é um material potencialmente significativo, que contribuiu também para a mudança de postura da ação pedagógica do investigador.

Consideramos que os objetivos foram alcançados, tanto na investigação sobre a questão que norteou o estudo, quanto na elaboração da proposta da *sequência didática* para o estudo das *razões trigonométricas no triângulo retângulo*, no 9º Ano do Ensino Fundamental da Educação Básica. Ao refletirmos acerca de todo o processo, reflexão sobre a ação, uma dificuldade ao trabalhar com a linha traçada por essa investigação que deve ser levada em consideração é a de que esse tipo de abordagem em sala de aula toma um tempo considerável para trabalhar um conteúdo. Por esse motivo, recomendamos ao professor que deseje utilizá-la, que a tome como um caminho que traz uma série de benefícios, mas que atente para a maneira como as atividades devem ser conduzidas. Os passos coerentes que seguimos e descrevemos se seguidos, só potencializam ainda mais os processos de ensino e de aprendizagem.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Este capítulo tem o propósito de apresentar algumas considerações relativas aos resultados obtidos na pesquisa, tendo por base o referencial teórico e proposições que ratificam o que julgamos serem as respostas aos nossos objetivos estabelecidos para a pesquisa, bem como, à questão norteadora que desencadeou o processo, extensamente discutida na análise das categorias apresentadas no capítulo 4. Também formalizamos algumas recomendações para futuras pesquisas, cujo foco seja o desenvolvimento de uma *sequência didática* para o ensino e a aprendizagem das *razões trigonométricas no triângulo retângulo.*

A investigação foi pautada no desenvolvimento da aprendizagem em situações nas quais foram utilizados variados recursos e estratégias de ensino, a partir da aplicação de uma *sequência didática* em relação ao conteúdo supracitado. No percurso da pesquisa, também procuramos identificar as características da *sequência didática,* o que facilitou a identificação dos processos de *diferenciação progressiva* e de *reconciliação integradora* dos conceitos relacionados ao tema.

Nesse sentido, imbuído pela busca de respostas aos objetivos e à questão norteadora, consideramos a possibilidade de que o ensino somente é exitoso quando há aprendizagem. A investida nesse campo fez-nos compreender que o professor que estrutura sua prática no sentido de oferecer ambientes de ensino com condições para que os alunos tenham experiências de aprendizagem significativa encontra desafios que vão além de organizar o material de ensino potencialmente significativo. Nesse viés, destacamos que a busca por evidências de aprendizagem significativa foi um importante desafio.

Para responder à questão que desencadeou a pesquisa, utilizamos a experiência de ensino em três momentos, com base nos pressupostos da *Engenharia Didática* preconizada por Artigue (1996) e Pais (2011). No primeiro momento, identificamos os conhecimentos prévios dos alunos pesquisados; em seguida, guiados pelos achados iniciais, estruturamos e aplicamos a *sequência didática;* por fim, analisamos a evolução conceitual apresentada pelos alunos após o desenvolvimento da *sequência didática*.

No momento inicial, foram propostas atividades simples de aplicação das *razões trigonométricas* a situações do cotidiano, como, por exemplo, ao conceito de índice de subida de um objeto. As justificativas apresentadas pelos alunos estavam associadas à Física, expressando experiências de aprendizagem não associadas ao conceito matemático. Essa observação nos levou a escolher, na continuidade, situações-problema que estivessem relacionadas ao fazer prático, utilizando os conhecimentos do dia a dia, relacionados aos conceitos foco do estudo.

Após o momento inicial, a *sequência didática* foi reestruturada e aplicada. Nessa fase, utilizamos uma série de recursos e estratégias de ensino, dentro e fora da sala de aula, fundamentados nos conhecimentos prévios, tendo como referencial os pressupostos da *Teoria de Aprendizagem Significativa* de Ausubel.

Em relação aos recursos e às estratégias de ensino utilizados, os resultados indicam que os procedimentos apresentados foram motivadores, relevantes e serviram para identificar potencialidades individuais: abstração, identificação de um problema numa situação, definição de um problema matemático, estabelecimento e interpretação de relações entre Matemática e situações reais. Também serviram como organizadores prévios: o uso de texto com recortes históricos (prática pouco usual pelos professores), acerca da evolução do conceito em voga, alimentando assim o surgimento de *subsunçores* mais elaborados. Dessa forma, à medida que esses *subsunçores* foram sendo incluídos, tornaram-se capazes de ancorar novas informações para a promoção da aprendizagem significativa.

A *sequência didática* pensada, movida pelo desejo de tornar as aulas mais significativas, com participação ativa dos aprendizes, envolveu-os numa atmosfera motivadora e propícia à construção do conhecimento, que visou direcionar o estudante a refletir, a compreender e a formular conclusões, a partir de observações em experiências manipulativas. Ao realizar experimentações investigativas, os aprendizes passaram a estabelecer relações a partir de suas próprias percepções, promovendo o aprendizado.

As atividades realizadas em grupos contribuíram para o desenvolvimento de competências como: argumentação, contextualização, abstração, comunicação e expressão. A estratégia permitiu que os alunos se tornassem mais participativos e engajados, críticos, colaborativos, atuantes e reflexivos sobre suas práticas. A partir dos registros nos cadernos e das nossas observações, constatamos a busca pelo conhecimento matemático, a colaboração e a integração dos membros dos grupos, ora discutindo métodos, ora realizando os cálculos, evidenciando assim o pensar e o trabalho coletivo. Mesmo os alunos com maior dificuldade, participaram, demonstrando evolução durante as atividades e nos registros de coleta de dados.

Na mesma linha, destacamos que, diferente das aulas tradicionais em que os alunos são dispostos em fileiras e comumente o professor é o autor do processo, trabalhar com atividades exploratórias compartilhadas favorecem a troca de ideias, a mobilidade e o protagonismo do aluno. Nesse sentido, inferimos que a aprendizagem tornou-se mais significativa e desenvolveu a autonomia e a motivação para aprender o conteúdo, conforme comprovado pelas análises das registradas.

Ainda, no decorrer do desenvolvimento da *sequência didática,* as situações-problema utilizadas para a ancoragem dos conceitos relacionados às *razões trigonométricas no triângulo retângulo* demonstraram ser uma forma simbólica de relacionar, por meio dos acontecimentos do cotidiano, o novo conhecimento com o conhecimento prévio relevante na estrutura cognitiva do aprendiz, de forma não arbitrária e não literal. Nesse sentido, evidenciamos que o produto desta interação ativa e integradora representou o surgimento de novos significados para o aluno, a partir da inter-relação entre os conceitos que emergiam.

As situações-problema propostas em ordem crescente de complexidade também corroboraram o processo de *diferenciação progressiva*, buscando uma perspectiva integradora. Tal encadeamento reflete a natureza substantiva e denotativa do produto interativo evidenciado.

Dado o comprovado no percurso da investigação, podemos concluir que as situações-problema a que se aludiu durante o desenvolvimento da *sequência didática* e do processo de análise relacionam-se com algum aspecto ou conteúdo existente, especificamente relevante nas estruturas cognitivas dos alunos. Isto é, por meio das situações-problema, da experimentação, do uso de materiais concretos utilizados e das situações que mesclaram a Matemática formal com a Matemática cotidiana, foram aprendidos conceitos que denotam indícios dos processos de *diferenciação* e de *reconciliação*.

A utilização do *software GeoGebra* na construção e na modelagem dos triângulos retângulos serviu como uma ponte cognitiva, que permite a ligação entre os *subsunçores* relevantes e o novo conceito aprendido. As atividades foram elaboradas com o objetivo de direcionar o estudante a refletir, a compreender e a formular conclusões, por meio de observações em experiências manipulativas no ambiente dinâmico do *software GeoGebra*. Consideramos que, ao realizarem experimentações investigativas apoiadas pelo *software*, os alunos passaram a estabelecer relações, compreenderam conceitos, experenciando um caminho diferenciado para a consolidação da aprendizagem significativa das *razões trigonométricas no triângulo retângulo*.

Nesse viés a utilização dos recursos também tornou a aprendizagem mais dinâmica, possibilitando que os aprendizes compreendessem melhor os conteúdos e, de forma interativa e dialogada, desenvolvessem sua criatividade, sua coordenação e suas habilidades. Por isso, alguns autores, como Fortuna (2003), ressaltam a importância do uso de recursos de ensino diversificados. O autor (2003) argumenta que o aluno desenvolve a iniciativa, a imaginação, o raciocínio, a memória, a atenção, a curiosidade e o interesse, bem como, concentra-se por mais tempo numa atividade, quando é confrontado com um ambiente de ensino que lhe permite fazer construções concretas. Além disso, cultiva o senso de responsabilidade individual e coletiva, em situações que requerem cooperação, bem como, coloca-se na perspectiva do outro. Outro autor que compartilha pensamento idêntico é Reginaldo et al (2012), que destaca que a realização de experimentos representa excelente ferramenta para que o aluno faça a experimentação do conteúdo e possa estabelecer a dinâmica e indissociável relação entre teoria e prática. Na mesma linha, Viveiro et al (2009) sustenta que as atividades de campo constituem importante estratégia para o ensino, uma vez que permitem explorar uma grande diversidade de conceitos, motivam os estudantes, possibilitam o contato direto com o ambiente e a melhor compreensão dos fenômenos, fazendo a ponte entre a aprendizagem propedêutica e as situações vivenciadas no cotidiano.

Conforme demonstrado no desenvolvimento da *sequência didática*, os diversos recursos, cada um com suas características específicas, podem tornar as aulas mais atrativas e contribuem para que o aluno tenha interesse pelo conteúdo trabalhado e construa conhecimentos, em vez de apenas cumprir tarefas. De acordo com a síntese e as análises realizadas à Luz da *Análise Textual Discursiva*, os resultados demonstraram que o uso de recursos e estratégias de ensino diferenciadas também proporciona aos alunos ganhos significativos nos processos de ensino e de aprendizagem. Ademais, as abordagens diferenciadas facilitam a relação professor – aluno – conhecimento.

De acordo com Costoldi e Polinarski (2009), a utilização de recursos didático-pedagógicos diferenciados pode preencher as lacunas deixadas pelo ensino tradicional e assim, além de expor o conteúdo de forma diferenciada, tornar os alunos participantes ativos dos processos. No entanto, é preciso esclarecer que, para o alcance dos objetivos propostos, o uso de recursos e materiais diversos no ensino deve ser sempre acompanhado de uma reflexão pedagógica acerca da sua verdadeira utilidade nos processos de ensino e de aprendizagem. Não convém perder-se em teorias, mas também não convém utilizar qualquer recurso didático por si só, sem objetivos claros. Dessa maneira, é necessário que o professor esteja preparado para utilizar os variados recursos, no ensino de cada conteúdo, objetivando que o aluno realmente aprenda.

Nesse sentido, as nossas abordagens nos três momentos da *sequência didática* foram fundamentais para conduzir as explicações e os argumentos, que, progressivamente, auxiliaram os alunos a *diferenciar* e a *reconciliar* conceitos, que permitiram a discussão, a interpretação e o desenvolvimento das atividades de forma mais significativa, permitindo observar, avaliar, adequar e validar as ações dos alunos.

A contribuição da *sequência didática* validada vem no sentido de orientar a estruturação de uma sequência de ensino, visando facilitar a aprendizagem significativa, com indicativos de como as atividades devem ser propostas e executadas. A opção por uma investigação guiada à Luz da *Teoria da Aprendizagem Significativa*, subsidiada pela *Metodologia da Engenharia Didática*, com abordagem metodológica de análise embasada na *Análise Textual Discursiva* nos permitiu entender que estar próximo dos dados é um fator crucial para elencar as evidências que acarretam a compreensão das questões implícitas e explícitas da investigação.

Nesse sentido, fazer a codificação desde o início da pesquisa permitiu-nos observar lacunas nos dados e buscar novos dados para seguir no entendimento analítico do fenômeno estudado e responder ao objetivo da pesquisa, *avaliar quais características da sequência didática que considera o uso de variados recursos de ensino pode favorecer a aquisição e a construção de conhecimentos pelos alunos, viabilizando indícios de aprendizagem significativa, das razões trigonométricas no triângulo retângulo.*

Sintetizamos, a partir dos nossos achados, algumas características que procuramos privilegiar, para que a *sequência didática* potencializasse a aquisição e a construção de conhecimentos dos alunos. Assim, foram avaliadas e consideradas pertinentes:

- A utilização de recursos de ensino diversificados: tradicionais (quadro, papel e lápis); material concreto variado (papel cartão, hastes, trena, corda, martelo, etc); informáticos (computador, *tablet*, telefone celular, *software*, aplicativos).

- A utilização de estratégias de ensino diversas: aula expositiva, trabalho em grupo, leitura, aula de campo, construção colaborativa, dinâmicas em grupo, uso de ferramentas cognitivas digitais.

- O uso e o manuseio de material concreto: estimulam a autonomia, a coletividade, a criatividade e as características perceptivas, que, consequentemente, estimulam os alunos a conjecturar, a apresentar ou a refutar hipóteses que favorecem os processos de aquisição e de retenção de conhecimentos.

- O uso de recursos informáticos: estimulam o uso de ferramentas cognitivas como parceiras dos processos de ensino e de aprendizagem; facilitam a visualização dos conceitos.

- A organização das aulas: organização e objetivos claros para o interventor e para os alunos são fundamentais.

- A organização sequencial: cada tópico novo proposto foi precedido de verificação de *subsunçores,* que relacionavam as ideias já discutidas e, presumivelmente, ancoradas na estrutura cognitiva dos alunos, fazendo a ponte entre os conhecimentos prévios e os novos a serem aprendidos.

- A promoção da consolidação do conhecimento: um novo tópico não era introduzido antes que o anterior estivesse estável e organizado para o aluno. A resolução de exercícios variados com distintos recursos de ensino, envolvendo os assuntos desenvolvidos é uma oportunidade de verificação da eficácia dos recursos e das estratégias para a aprendizagem.

- O uso dos princípios da *diferenciação progressiva* e da *reconciliação integradora*.

Essas e outras características que, porventura, não tenham sido elencadas, para nós, representam a essência para trabalhar o assunto com base na *Engenharia Didática*. Reiteramos que na empreitada tivemos como subsídio uma *sequência didática* embasada nos princípios da teoria de Ausubel, que ensejou indicativos de aprendizagem significativa a partir do seu desenvolvimento.

Nesse seguimento, ressaltamos, ainda, que não existe uma *sequência didática* mágica para o ensino, mas, sim, possibilidades de materiais que sejam potencialmente significativos, que têm por objetivo a melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem e o desenvolvimento das estruturas cognitivas dos alunos, que podem ampliar significativamente a forma como adquirem e retêm seus conhecimentos. O emprego de recursos e ferramentas cognitivas no processo pedagógico, assim como o uso de qualquer estratégia para atingir determinado objetivo exigem do educador uma reflexão crítica. Refletir criticamente sobre o valor pedagógico dos recursos didáticos significa também refletir sobre as transformações da escola e repensar os processos de ensino e de aprendizagem que utilizamos em nossas salas de aula.

Como decidir quais usar? Cabe ao professor diagnosticar, avaliar e tomar decisões, sempre no intuito de proporcionar a máxima aprendizagem a todos os alunos, mesmo que seja em diferentes tempos e níveis.

Assim, consideramos ao final desse estudo que a integração de atividades com utilização de recursos de ensino distintos favorece o aprendizado dos alunos, pois cada um pode escolher o modelo que mais se adequa a sua compreensão e consequente que esteja mais próximo da sua visão de mundo. Nesse seguimento, o professor necessariamente tem o papel de orientador e, à medida que o aluno, o grupo, colaboram, a integração de atividades da *sequência didática* proporcionou resultados que conferem relevância a essa combinação, em cada contexto da pesquisa.

Convidar os alunos a participarem das discussões e mesmo atribuir responsabilidade a eles, inicialmente em torno de uma problemática, e depois a fim de avançar pelas fases da *sequência didática*, contribuiu para que os alunos verbalizassem o que se passava em suas mentes ao pensarem sobre as atividades. Tal fato, propiciou, a esse pesquisador fazer inferências sobre os modelos mentais de evidências de atribuição de significados pelos alunos.

Ademais, os achados dos primórdios dessa pesquisa já resultaram em duas publicações: *software GeoGebra proporcionando o ensino de funções trigonométricas*[17]; *concepções de alunos sobre o uso de softwares como auxiliares pedagógicos na matemática*[18]*;* assim como, no encaminhamento de um terceiro artigo: *o ensino da trigonometria no triângulo retângulo: uma revisão bibliográfica*[19]; submetido à revista especializada. A partir das publicações, ainda vemos contribuições para a área da aprendizagem significativa, ao acrescentar resultados

---

[17] ISSN – 1982 – 4866. Revista Dynamis. FURB, Blumenau , V.24, n. 2 – p. 78- 95, 2018.
[18] VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. ISBN: 978 – 85 – 98092 – 49 – 2.
[19] Reflexão e Ação: https://online.unisc.br/seer/index.php/reflex/index ISSN on-line: 0104-6578

de uma pesquisa relacionada ao ensino de Trigonometria no âmbito da utilização de uma *sequência didática*, que trata-se de uma estrutura proposta recente e que se mostrou bastante pertinente como uma forma de pensar e organizar um ensino potencialmente significativo.

Concluímos, por fim, que a utilização dessa proposta de *sequência didática* como recurso de ensino merece ser aplicada e avaliada por novos estudos e provoquem novos *insights* de pesquisas, em contextos e realidades diferentes dos que foi validada. Para esse pesquisador, essa forma de ensinar, diferente da tradicional, mesclando contextualização histórica, aula expositiva dialogada, roda de conversa, uso de recursos informáticos, aula de campo com atividades exploratórias, mostrou a necessidade de adequações e da busca constante por novos conhecimentos, também por parte desse professor pesquisador, que, nessa busca, reconstruiu-se como educador da Educação Básica.

REFERÊNCIAS

ALCICI, S. A. R. A escola na sociedade moderna. In: ALMEIDA, N. A. A.; YAMADA, B. A. G. P.; MANFREDINI, B. F.; ALCICI, S. A. R. (Coord.). **Tecnologia na escola – abordagem pedagógica e abordagem técnica.** São Paulo: Cengage Learnig, 2014.

ALMEIDA, L. M. W. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. **Zetetiké**, Campinas, v. 18, número temático, 379-406, 2010.

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO , C. Q. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. **Revista de Educação Matemática**, Santa Catarina, v. 3, n. 6, p. 62-77, 2008.

ALVARENGA, C. F. **Relações de gênero e trabalho docente: jornadas e ritmos no cotidiano de professoras e professores.** 2008. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-13062008-155413/pt-br.php>. Acesso em: out. 2018.

ARSAC,G. .L. Origine de la Demonstration: Essai d. Epistémologie Didactique. **Revista Recherche en Didactique des Mathématiques (RDM)**, v. 8, nº 3, pp 267-312, Ed. La Pensée Sauvage, France, 1987.

ARTIGUE, M. Ingénierie dadactique. In: BRUN, J. (Coord.). **Didactique des Mathématiques.** Lausanne-Paris: Delachaux, 1996.

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção de conhecimentos:** uma perspectiva cognitiva. Lisboa: Plátano, 2003.

AUSUBEL, D. P. **The acquisition and retention of knowledge:** a cognitive view. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.

AUSUBEL, D.P. **Educational psychology: a cognitive view**. New York, Holt. Rinehart and Winston, 1968.

AUSUBEL, D. P. **The Psychology of Meaningful Verbal Learning.** New York: Grune and Stratton, Inc. 1963.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia educacional**. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BASSO, A. **As tecnologias no ensino-aprendizagem:** uma discussão em aberto. Pato Branco: IMPREPEL, 2015.

BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções & perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

BOGDAN, R. C; BLIKEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação.** Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C. Humans-With-Media and continuing education for mathematics teachers in online environments. **ZDM Mathematics Education**, v. 44, Issue 6, p. 801–814. Out. 2012.

BORBA, M. C. A pesquisa qualitativa em educação matemática. In: **Anais** da 27ª reunião anual da Anped. Caxambu, nov. 2004. CD-ROM.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática** – Coleção Tendências em Educação Matemática – Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BORBA, M. C. Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e Reorganização do Pensamento. In. M. A. V. Bicudo (Coord.). **Pesquisa em Educação Matemática:** Concepções e Perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

BORSSOI, A. H. **Modelagem matemática, aprendizagem significativa e tecnologias: articulações em diferentes contextos educacionais**. 2013. Tese (Doutorado). Disponível em:<http://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UEL_25102658f9d96165d54ed420aff99775>. Acesso: mar. 2018.

BOTTENTUIT JUNIOR, J. B.; ALBUQUERQUE, O. C. P.; COUTINHO, C. P. **WHATSAPP e suas Aplicações na Educação: uma revisão sistemática da Literatura.** Revista Educaonline, v. 10, p. 67-87, 2016.

BORTOLI, G. **Um olhar histórico nas aulas de trigonometria: possibilidades de uma prática pedagógica investigativa.** 2012. Dissertação (Mestrado). Disponível em: <ttp://hdl.handle.net/10737/281>. Acesso: abr. 2018.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2ª ed. São Paulo: Edgar Blucher, 1996.

BRITO, A. E. Formar professores: rediscutindo o trabalho e os saberes docentes. In: SOBRINHO, J. A. de C. M.; CARVALHO, M. A. de (Coord.). **Formação de professores e práticas docentes:** olhares contemporâneos. Belo Horizonte: Autêntica, 2006, p. 41-53.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas:** conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

BRUM, W. P.; SILVA, S. de C. R. da. A utilização de um recurso tecnológico para apresentação do tema geometria plana analisada a partir da teoria da aprendizagem significativa**. Aprendizagem Significativa em Revista/Meaningful Learning Review**, v. 4, n. 2, p. 72-87, 2014.

BULEGON, A. M. **Contribuições dos objetos de aprendizagem, no ensino de física, para o desenvolvimento do pensamento crítico e da aprendizagem significativa**. 2011. Tese (Doutorado). Disponível em: <http://bdtd.ibict.br/vufind/Record/URGS_9d0e96a4767499c88f1d528dca9b4b87>. Acesso: jun. 2018.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. Engenharia Didática: um referencial para a ação investigativa e para a formação dos professores de Matemática. **Zetetike**, Unicamp, v. 13, n. 23, p. 85-118, 2005.

COSTOLDI, R.; POLINARSKI, C. A. Utilização de recursos didático-pedagógicos na motivação da aprendizagem. **I Simpósio Internacional de Ensino e Tecnologia**. 2009.

CHEVALLARD, Y. **La Transposition Didactique – du savoir savant au savoir enseigné.** Grenoble: La Pensee Sauvage Editions, 1991.

CHEMIN, B. F. **Manual da Univates para trabalhos acadêmicos:** planejamento, elaboração e apresentação / Beatris Francisca Chemin. - 3. ed. -- Lajeado: Ed. da Univates, 2015.

COSTA, N. M. L. **A História da Trigonometria.** 2016. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3_pdf/historia_triogono.pdf>. Acesso em nov. 2018.

COSTA, J. E. P. de A. **A teoria da assimilação:** construindo redes de saberes no contexto da educação digital. 2012. Disponível em: <https://docplayer.com.br/11231145-A-teoria-da-assimilacao-construindo-redes-de-saberes-no-contexto-da-educacao-digital.html>. Acesso: set. 2018.

CRUZ, R. P.; QUARTIERI, M. T.; KLIEMANN, G. L. O uso do tablet nos anos iniciais como ferramenta de ensino. Disponível em: <http://sipemat2018.sbempara.com.br/files/**Anais**_SIPEMATP arte1.pdf>. Acesso: out. 2018.

CRUZ, R. P.; QUARTIERI, M. T; SANTOS, S. C. A. Recursos tecnológicos: contribuições aos processos de ensino e de aprendizagem. **Anais**: VIII Jornada Nacional de Educação Matemática. Disponível em: <http://jem.upf.br/images/Trabalhos 2018/Eixo5/JEM_Ident_Final.pdf>. Acesso: dez. 2018.

CRUZ, R. P. da. Integrando tablets na disciplina de matemática: percepções dos alunos da Educação Básica. 2016. **Dissertação (Mestrado)** – Curso de Ensino, Universidade do Vale do Taquari - Univates, Lajeado, 17 out. 2016. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10737/1200>.

CURY, H. N. **Análise de erros:** o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

DANTE, L. R. **Tudo é Matemática**, 1 ed. SP São Paulo: Ática, 2006.

D'AMORE, B. *Epistemologia e Didática da Matemática*. São Paulo: Escrituras Editora, 2005.

DERRY, S. J. **Flexible cognitive tools for problem solving instruction.** Paper presented at the annual meenting of the American Educational Research Association, Boston, p. 16-20, abril de 1990.

DOUADY, R. Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. **Repères IREM**, 6, p. 132-158, 1992.

DUFFY, T.M., CUNNINGHAM, D. Constructivism: implications for the design and delivery of instruction. In: JONASSEN, D.H. (Coord.). **The handbook of research on educational comunications and technology.** New York: Macmillan, 1996.

FERNANDES, R. U. **Estratégias pedagógicas com uso de tecnologias para o ensino de trigonometria na circunferência.** 2010. Dissertação (Mestrado). Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11445>. Acesso: jun. 2018.

FILHO, G. P. **Estradas de Rodagem:** Projeto Geométrico. São Carlos: G. Pontes Filho, 1998.

FONSECA, L. S. **A aprendizagem das funções trigonométricas na perspectiva da teoria das situações didáticas.** 2011. Tese (Doutorado). Disponível em: <http://ri.ufs.br/jspui/handle/riufs/ 5085>. Acesso: out. 2018.

FONSECA, L. S. **Aprendizagem em Trigonometria:** obstáculos, sentidos e mobilizações. São Cristóvão: Editora UFS, 2010.

FONTANINI, M. L. C. **Modelagem matemática x aprendizagem significativa:** uma investigação usando mapas conceituais, 2007.

FORTUNA, T. R. Jogo em aula: recurso permite repensar as relações de ensino aprendizagem. **Revista do Professor**, Porto Alegre, v. 19, n. 75, p. 15- 19, 2003. Disponível em: <http://files.faculdadede.webnode.com.br/200000031-37c3b38be4/Jogo%20na%20sala%20de%20aula%20T%C3%A2nia%20Fortuna.pdf>. Acesso em: 28 set. 2019.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia:** saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1997.

GIL, A. C**. Como elaborar projetos de pesquisa.** 5ª ed. São Paulo: Atlas, 2010.

GOWIN, D.B. **Educating**. Ithaca, N.Y., Cornell University Press. 1981.

GUEDES, F. J. "Soma dos ângulos internos de um triângulo"; ***Brasil Escola*****.** Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/soma-dos-angulos-internos-um-triangulo.htm. Acesso em 11 de novembro de 2019.

HOGBEN, L. **Maravilhas da Matemática**. Porto Alegre: Ed. Globo, 1946.

HOWLAND, J. L.; JONASSEN, D.; MARRA, R. M. **Meaningful Learning with Technology.** 4ª ed. Boston / USA: Pearson Education Limited. 2014.

HOWLAND, J. L.; JONASSEN, D.; MARRA, R. M. **Meaningful Learning with Technology.** 4ª ed. Boston / USA: Pearson, 2011.

JONASSEN, D. H. **Computadores, Ferramentas Cognitivas – Desenvolver o pensamento crítico nas escolas.** Adaptação para língua portuguesa: Ana Rosa Gonçalves, Sandra Fradão, Maria Francisca Soares. Porto, Portugal: Porto Editora, 2007.

JONASSEN, D. H. O uso das novas tecnologias na educação a distância e a aprendizagem construtivista. **Revista Em Aberto,** Brasília, DF, v. 16, n. 70, p. 70-88, abr./jun. 1996. Disponível em: <http://www.rbep.inep.gov.br/index.php/emaberto/article/view/1054/956>. Acesso: ago. 2018.

JONASSEN, D. H.; PECK, K. C.; WILSON, B. G. **Learning with tectnology: A constructist perspective.** Upper Saddle River, NJ: Merril / Prentice Hall. 1999.

KADU, M. **Fisíca do Futuro:** como a ciência irá transformar a nossa vida diária, no ano de 2100. Nova York: Universidade de Nova York, 2011.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A Global survey of international perspectives on modeling in mathematics education. **The International Journal on Mathematics Education**, v. 38, n.3, p. 302-310, 2006.

KALINKE, M. A. **Tecnologias no Ensino:** a linguagem matemática na web. Curitiba: CVR, 2014.

KLEIN, M. E. Z.; COSTA, S. S. C.. Investigando as Concepções Prévias dos Alunos do Segundo Ano do Ensino Médio e seus Desempenhos em alguns Conceitos do Campo Conceitual da Trigonometria. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 24, nº 38, p. 43 a 73, abril 2011.

KOMMERS, P. A. M.; JONASSEN, D. H.; MAYES, T.M. **Cognitive tools for learning.** Heidelberg, Alemanha: Springer-Verlag, 1992.

LEITE, R. S. **O Ensino de parte da Geometria do Ensino Fundamental: análise de dificuldades e sugestão de sequência didática.** 2013. Dissertação (Mestrado). Disponível em: <http://repositorio.ufes.br/handle/10/4809>. Acesso: set. 2018.

LUDKE, M.; ANDRE, M. E. D. A. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MARCONI, M. de A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica.** 5ª ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MASCARIN, L. A. **A utilização de atividades lúdicas e exploratórias no ensino e aprendizagem de matemática**. 2017. Dissertação (Mestrado). Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-06122017-094120/pt-br.php>. Acesso: ago. 2018.

MATURANA, H.R. **Autopoiesis and cognition, the realization of the living.** Boston (MA): Reidel Publishing, 1980.

MÁXIMO, A.; ALVARENGA, B. **Física.** v. 1, 2. 1ª ed. São Paulo: Scipione, 2011.

MENESES, V. L. Educação a Distância: Um curso de leitura em língua inglesa para informática via internet. In:, (Org.). **Interação e aprendizagem em ambiente virtual.** Belo Horizonte: Editora da UFMG,2007.

MINAYO, M. C. S. Ciência, técnica e arte: o desafio da pesquisa social. In: MINAYO, Maria C. S (Coord.). **Pesquisa social:** teoria, método e criatividade. 22ª ed. Petrópolis: Vozes, 1994.

MIORIM, M. A. **Introdução à História da Educação Matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

MORAES, R. Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva. **Ciência & Educação**, v.9, n. 2, p.191-211, 2003.

MORAES, R. e GALIAZZI, M.C. **Análise textual discursiva.** 2ª ed. rev. Editora Unijuí, Ijuí/RS, 2016.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem Significativa:** a teoria e textos complementares. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011[a].

MOREIRA, M. A. Mapas conceituais como instrumentos para promover a diferenciação conceitual progressiva e a reconciliação integrativa. **Ciência & Cultura**, v. 32, n. 4, p. 474-479, 1980.

MOREIRA, M. A. Aprendizagem significativa: um conceito subjacente. **Aprendizagem Significativa em Revista/Meaningful Learning Review**, v. 1, n. 3, p. 25-46, 2011[b]. Disponível em: <https://www.if.ufrgs.br/~moreira/ apsigsubport.pdf>. Acesso: ago. 2018.

MOREIRA, M. A. **O que é afinal Aprendizagem Significativa?** Aula Inaugural do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais, Instituto de Física, Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá, 2010. Retrieved from <http://moreira.if.ufrgs.br/oqueeafinal.pdf>.

MOREIRA, M. A. **Subsídios teóricos para o professor pesquisador em ensino de ciências:** A Teoria da Aprendizagem Significativa. Porto Alegre-RS, 2009. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/~moreira>. Acesso: ago. 2018.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa:** da visão clássica à visão crítica1 (Meaningful learning: from the classical to the critical view), 2006. Disponível em: <https://www.if.ufrgs.br/~moreira/visaoclasicavisaocritica.pdf>. Acesso: ago. 2018.

MOREIRA, M. A. La teoría del aprendizaje significativo. In: MOREIRA, M. A. & CABALLERO, C. (Coord.).**Textos de apoio do programa internacional de doutorado em ensino de ciências da universidade de Burgos/UFRGS.** Porto Alegre: UFRGS, 2000.

MOREIRA, M. A. **Teorias de aprendizagem.** São Paulo: E.P.U., 1999.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa:** um conceito subjacente. In: Encontro Internacional sobre aprendizagem significativa. Espanha, 1997.

MOREIRA, M. A.; BUCHWEITZ, B. **Novas estratégias de ensino e aprendizagem: os mapas conceituais e o Vê epistemológico**. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 1993.

MOREIRA, M. A. “Mapas conceituais como instrumentos para promover a diferenciação conceitual progressiva e a reconciliação integrativa.” **Ciência e Cultura**, São Paulo, 32(4): 474-9, 1980.

MOREIRA, M.A. (2004). Investigación básica em educación em ciencias: una visión personal. **Revista Chilena de Educación Científica**. v. 3, n. 1, 10-17.

MOREIRA, M. A. e MASINI, E. F. S. **Aprendizagem Significativa:** a Teoria de David Ausubel. São Paulo, Centauro, 2011.

NACARATO, A. M.; BREDARIOL, C. C.; PASSOS, M. P. F. (2010). **Trigonometria:** uma análise da sua evolução histórica e da transposição didática desse conhecimento presente nos manuais e propostas curriculares. Disponível em: <http://nutes2.nutes.ufrj.br/coordenacao/textosapoio/trigonometria.pdf>. Acesso em: out. 2018.

NOVAK, J. D. Empowering Learners and Educators. **Journal for Educators, Teachers and Trainers.** v. 4 (1), 2012. Disponível em: <http://www.ugr.es/~jett/index.php>. Acesso: out. 2018.

NOVAK, J. D. A Theory of Education: meaningful learning underlies the constructive integration of thinking, feeling, and acting leading to empowerment for commitment and responsibility. **Aprendizagem Significativa em Revista,** Porto Alegre, v. 1, n. 2, p.1-14, ago. 2011. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/asr>. Acesso em: 05 fev. 2018.

NOVAK, J. D. **Learning, Creating, and Using Knowledge:** Concept maps as facilitative tools in schools and corporations. 2010. Disponível em: <file:///C:/Users/Romildo/Downloads/article_43512.pdf>. Acesso: set. 2018.

NOVAK, J. D. **Meaningful Learning:** The Essential Factor for Conceptual Change in Limited or Inappropriate Propositional Hierarchies Leading to Empowerment of Learners. 2002. Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.505.2763&rep=rep1&type=pdf>. Acesso: set. 2018.

NOVAK, J. D. **Aprender, criar e utilizar o conhecimento**: mapas conceituais como ferramentas de facilitação nas escolas e empresas. Lisboa-PT, Plátano Edições Técnicas, 2000.

NOVAK, J.D. **Uma teoria de educação.** São Paulo, Pioneira, 1981. Tradução para o português, MOREIRA, M.A. Do original: A theory of education. Ithaca, N.Y., Cornell University, 1977.

NOVAK, J.D. **A theory of education.** Ithaca, N.Y., Cornell University, 1977.

NOVAK, J. D.; CAÑAS, A. J. **La Teoría Subyacente a los Mapas Conceptuales y a Cómo Construirlos, Reporte Técnico IHMC CmapTools, Florida Institute for Human and Machine Cognition.** 2006. Disponível em: <http://cmap.ihmc.us/Publications/ResearchPapers/TheoryUnderlyingConceptMaps.pdf>. Acesso: ago. 2018.

NOVAK, J. D.; CAÑAS, A. J. A teoria subjacente aos mapas conceituais e como elaborá-los e usá-los. **Práxis Educativa**, v. 5, n. 1, p. 9-29, 2010. Disponível em: <http://cmap.ihmc.us/Publications/ResearchPapers/TeoriaSubjacenteAosMapasConceituais. pdf>. Acesso em: 10 mar. 2018.

NOVAK, J.D. and GOWIN, D.B. (1984). **Learning how to learn.** Cambridge, Cambridge University Press.

NOVAK, J D e GOWIN, D. **Aprender a aprender.** Plátano – Lisboa (1999).

NOVAK, J.D.; GOWIN, D.B. **Aprender a aprender.** Lisboa. Plátano Edições Técnicas. Tradução ao português, VALADARES, C. Do original Learning how to learn, 1996.

NOVAK, J. D.; GOWIN, D. B. **Aprendiendo a Aprender**. Tradução: CAMPANARIO. J.M. e CAMPANARIO, E. Barcelona: Martínez Roca, 1988.

OCANHA, M. **Uma introdução à trigonometria com aprendizagem significativa.** 2016. Dissertação (Mestrado). Disponível em: <http://repositorio.cbc.ufms.br:8080/jspui/handle/ 123456789/2888>. Acesso: ago. 2018.

OLIVEIRA, J. E. M. **A trigonometria na educação básica com foco em sua evolução histórica e suas aplicações contemporâneas**. 2013. Dissertação (Mestrado). Disponível em: <http://locus.ufv.br/handle/123456789/5886>. Acesso em: out. 2018.

OMOROGIUWA, K. O. **Facilitating Self-Regulated Learning Through Effective Feedback.** 2012. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/275961657_Technology_Integration_for_Meaningful_Learning-the_Constructivist_View.>. Acesso em: out. 2018.

PAIS, L. C**. Didática da Matemática – uma análise da influência francesa.** Belo Horizonte: Autentica Editora, 2011.

PEA, R. D. “Beyond amplification: Using the computer to reorganize mental functioning”. **Educational Psychologist**, v20(4), p. 167-182, 1985.

PÊGO, R. N. **O Ensino-aprendizagem de Matemática Através de Projetos Envolvendo Profissões: um Estudo de Caso no Ensino Fundamental.** 2013. Dissertação (Mestrado). Disponível em: <http://repositorio.ufes.br/handle/10/4807>. Acesso: ago. 2018.

PEREIRA, C. da S. **Aprendizagem em trigonometria no ensino médio contribuições da teoria da aprendizagem significativa**. 2011. Dissertação (Mestrado). Disponível em: <http://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UEPB_64616d3762020c465f7692eb0404cc2c>. Acesso: set. 2018.

PEÑA, A. O. et al. **Mapas conceituais:** uma técnica para aprender. Edições Loyola, São Paulo, SP, 2005.

PERKINS, D, N. "Person-plus: A distributed view of thinking and learning". In G. Salomon (Coord.) **Distributed cognitions:** Psychological and educational considerations. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

PIAGET, J. **The equilibration of cognitive structures, the central problem of intellectual development.** Chicago (USA): University of Chicago Press, 1985.

PIMENTA, C. R. T.; OLIVEIRA, M. P. **Projeto Geométrico de Rodovias.** 2ª ed. São Carlos: RiMa, 2004.

POZO, J. I. **Teorias cognitivas da aprendizagem.** 3ª ed. São Paulo: Artes Medicas, 1998.

REGINALDO, C. C.; SHEID. N. J.; GULLICH, R. I. C. O ensino de ciências e a experimentação. In: SEMINÁRIO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO DA REGIÃO SUL, 9, Caxias do Sul, 2012. **Anais do IX ANPED SUL**. Disponível em: <http://www.ucs.br/etc/conferencias/index.php/anpedsul/9anpedsul/paper/viewFile/2782/286> Acesso: 27 set. 2019.

REIS, A. F. **Ensinando operações com grandezas físicas vetoriais no ensino médio através de uma unidade de ensino potencialmente significativa**. 2016. Dissertação (Mestrado). Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/8305>. Acesso em ago. 2018.

RIBEIRO, T. N. **O Ensino de razões trigonométricas no triângulo retângulo a partir de situações aplicadas à Física:** um estudo baseado nas Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS). 2015. (Tese). Disponível em:

<https://s3.amazonaws.com/pgsskroton-teses/94d31c20 ec58a2fad699c638c7 e87861.pdf>. Acesso: jun. 2018.

RICHARDSON, R. J. **Pesquisa social:** métodos e técnicas. 3ª ed. São Paulo: Atlas, 1999.

ROCHA, J. F. M. **Origens e evolução das ideias da Física**. EDUFBA, Salvador/BA, 2002.

ROSA, M.; OREY, D. C. A trivium curriculum for mathematics based on literacy, matheracy, and technoracy: an ethnomathematics perspective. **ZDM**, Berlim, n. 47, v.4, p. 587–598, 2015.

SALOMON, G. On the nature of pedagogic computer tools. The case of the writing partner. In LAJOE, S. P. e Derry, S. J. (Coord.), **Computers as cognitive tools.** Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1993.

SALOMON, G.; GLOBERSON, T. “Skill may not be enough: The role of mindfulness in learning and transfer”. **International Journal of Educational Researc**, n. 11, v. 6, p. 623-637, 1987.

SAMPAIO, H.R.; BATISTA, I. L. Mathematics history and cognitive values on a didactic sequence: Teaching trigonometry. **REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education,** *7*(3), 311-332, 2018. doi: 10.4471/redimat.2018.2727. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2018.2727>. Acesso: nov. 2018.

SANTOS, J. L. B. **Uma sequência didática para a aprendizagem das noções de trigonometria fundada na teoria das inteligências múltiplas**. 2017. Dissertação (Mestrado). Disponível em: <https://ri.ufs.br/handle/riufs/5129>. Acesso: set. 2018.

SANTOS, M. E. dos. **Ensino das relações métricas do triângulo retângulo com robótica educacional.** 2016. Dissertação (Mestrado). Disponível em: <http://repositorio.ifam.edu.br/jspui/handle/4321/57>. Acesso, set. 2018.

SCHANK, R.C. **Explanation patterns:** understanding mechanically and creatively. Hillsdale (NJ): Lawrence Erlbaum Associates, 1986.

SIERPINSKA, A. Obstacles Épistémologiques Relatifs a la Notion de Limite. **Revista Recherche en Didactique des Mathématiques (RDM),** v. 6, n.1, p 5-67, 1985.

SILVA, E. G. M. G. da. **Contextualização histórica para o estudo da trigonometria e construção do teodolito no Ensino Fundamental**. 2015. Dissertação (Mestrado). Disponível em: <http://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UNB_ 3e9c62b83a70410d40c21f632d7244d2>. Acesso: ago. 2018.

SILVA, E. R. da. **O surgimento das trigonometrias em diferentes culturas e as relações estabelecidas entre elas.** 2014. Dissertação (Mestrado). Disponível em: <http://repositorio .ufpa.br/jspui/handle/2011/8551>. Acesso: ago. 2018.

SOUZA, C. A. de; VICTER, E. F. e LOPES, J. R.. **Uma breve história da trigonometria e seus conceitos gerais**. Mesquita, RJ: Ed. Entorno, 2011.

SPENCE, L. **Creating Sinificant Learning Experiences – the key to quality in educational programs**. 2001. Disponível em: <http://media.wiley.com/product_data/ excerpt/51/07879605/0787960551.pdf>. Acesso: ago. 2018.

TENFEN, D. N. **Mapas conceituais como ferramentas para a organização do conhecimento em uma disciplina sobre a história da física,** 2011.

TRIVINÕS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em Ciências Sociais.** São Paulo: Atlas, 1995.

UTEMOV. V. V.; KHUSAINOVA, R. M.; SERGEEVA, M. G.; SHESTAK, V. A. **Full Packaged Learning Solutions for Studying Mathematics at School.** 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.29333/ejmste/95122>. Acesso em: set. 2018.

VALENTE, J. A. **Computadores e conhecimento**: repensando a educação. Campinas, SP: UNICAMP/NIED, Editora: Artes Médicas, 2014.

VALLORI, A. B. **Meaningful Learning in Practice.** 2014. Disponível em: <http://jehdnet.com/journals/jehd/Vol_3_No_4_ December_2014/18.pdf>. Acesso: set. 2018.

VERGNAUD, G. Epistemology and Psicology in Mathematics Education. In: **Mathematics and Cognition**., NESHER, P. e KILPATRICK, J. (Coord.). pp 14 -30, Cambridge University Press, 1994.

VIVEIRO, A. A.; DINIZ, R. E. S. Atividades de campo no ensino das ciências e na educação ambiental: refletindo sobre as potencialidades desta estratégia na pratica escolar. **Ciência em tela**, Rio de janeiro, v. 2, n. 1, 2009. Disponível em < http://www.cienciaemtela.nutes.ufrj.br/artigos/0109viveiro.pdf> acesso: set. 2019.

WIGGINS, G. Assessment: Authenticity, context, and validity. **Phi Delta Kappan,** v. 75, n. 3, p. 200-214, 1993.

YOUSSEF, A. N.; SOARES, E.; FERNANDEZ, V. P. **Matemática.** 1ª ed. São Paulo: Scipione, 2008.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Ficha de observação participante

Professor:____

Disciplina:____

Data:______/______/ 2019

Tema da aula:____

Tempo de observação (h): ____

Registros de atividades, metodologias utilizadas, estratégias do pesquisador, dificuldades emergentes, comportamento dos alunos diante da atividade proposta, observações resultantes das práticas em sua totalidade.

Observação das observações:

____

____

____

____

____

____

____

____

APÊNDICE B – Teste de conhecimentos inicial

Nome completo:____

1) Observe o desenho. Na casa **1** identifique com “**x”** três pares de retas paralelas e na casa **2** três pares de retas perpendiculares.

1

2

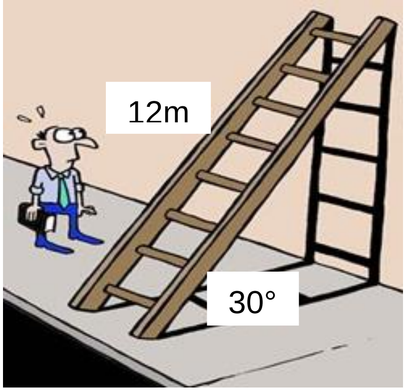
2) Ao subir uma ladeira a pé, você fica mais cansado do que andando numa superfície plana. Por que isso acontece?

3) O que é um ângulo? Desenhe no espaço que segue um exemplo de ângulo de 90º.

4) Faça o esboço gráfico de um triângulo retângulo e destaque suas principais características:

5) Em rampas para cadeirantes, para facilitar o deslocamento da pessoa na subida ou na descida, o aclive da mesma deve ser maior ou menor? Justifique.

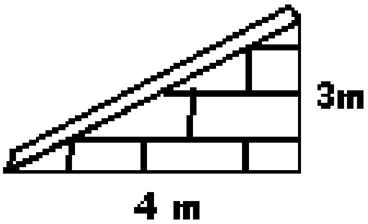
6) A que altura de uma parede uma escada de 12m se apoia, se a base da escada e a superfície formam um ângulo de 30°?



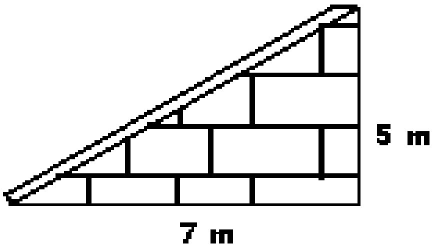
a) 10m b) 10,18m c) 6m d) 6,18m e) 12,18m

7) Qual das duas rampas a seguir é a mais íngreme ou a que tem aclive maior? Justifique a sua resposta.

(1)

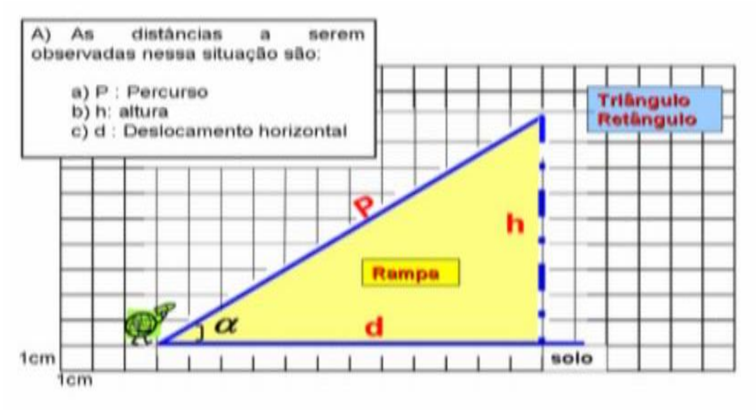


(2)



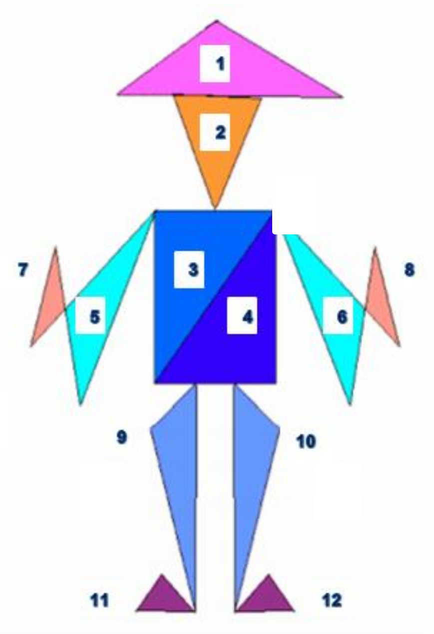
Justificativa:

8) (MENDES, M. A., 2011) Qualquer subida pode ter sua trajetória representada por um triângulo retângulo. Suponha que uma das rampas do problema seja a representada a seguir.



O triângulo retângulo é um triângulo em que seus lados possuem nomes diferenciados dos demais triângulos. Os lados perpendiculares, que formam o ângulo reto, são denominados de catetos oposto ou adjacente e o lado oposto ao ângulo reto (o lado de maior medida) é denominado Hipotenusa. Portanto, no triângulo acima, de ângulo α, o lado denominado de P é___________________, o lado denominado de h é____________________ e o lado denominado de d é _____________________.

9) De acordo com a numeração dos triângulos apresentados na figura que segue classifique-os em: em: em:

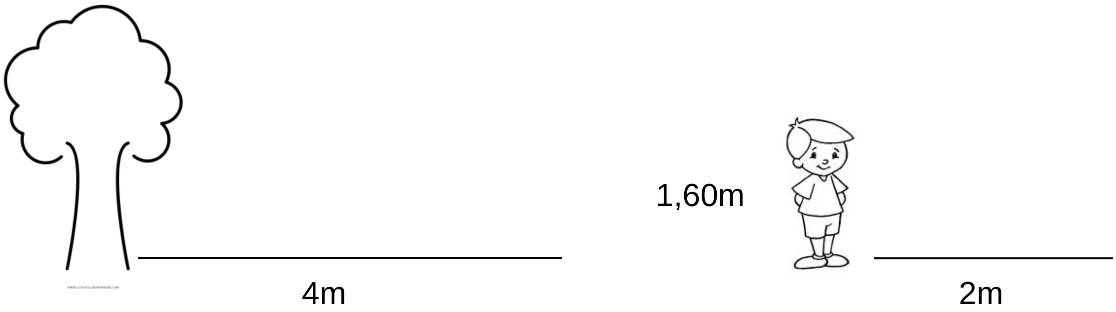


Escaleno_____________________

Retângulo____________________

Isósceles_____________________

10) Suponha que uma pessoa de 1,60m de altura projete sobre a calçada uma sombra de 2m. No mesmo instante, uma árvore ao lado produz uma sombra de 4m. Qual a altura dessa árvore?



APÊNDICE C – Teste de conhecimentos final

Nome completo:____

1) Um avião decola com uma inclinação de 15° em relação ao horizonte. Após percorrer 500*m*500m nesta direção, qual será a altura do avião em relação à pista? (Utilize sen 15° = 0,26; cos 15° = 0,97; tg 15° = 3,73; sen 15° = 0,26; cos 15° = 0,97; tg 15° = 3,73).

2) Cite aplicações da Trigonometria que você reconhece em seu dia-a-dia. Explique o porquê você às considera importante.

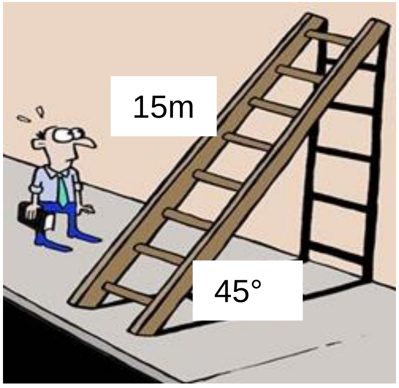
____

____

____

____

3) A que altura de uma parede uma escada de 12m se apoia, se a base da escada e a superfície plana formam um ângulo de 30°? Descreva como você pensou para resolver esta situação.



b) 10,5m b) 10,18m c) 6m d) 6,18m e) 12,18m

4) Redija uma situação-problema vivenciada no seu dia a dia que envolva aplicação de razões trigonométricas. Descreva a possível solução do problema.

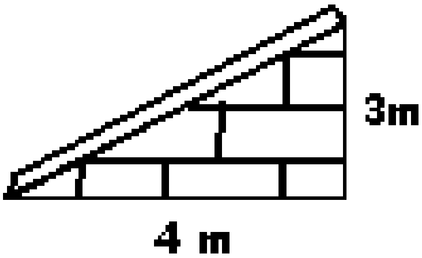
____

____

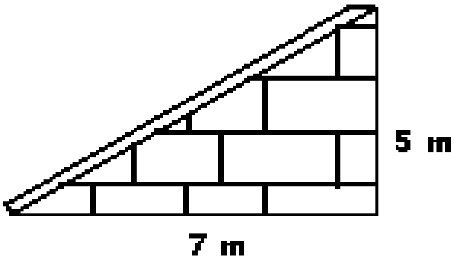
____

____

5) Qual das duas rampas a seguir é a mais íngreme ou a que tem aclive maior? Justifique a sua resposta.



(1)



(2)

Justificativa:

____

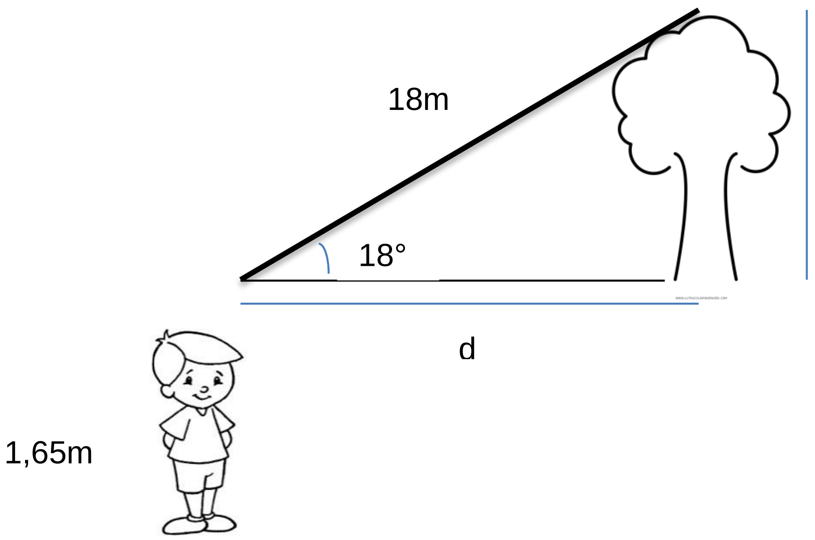
____

____

6) Faça o esboço gráfico de um triângulo retângulo e destaque suas principais características:

7) Um cabo foi colocado a uma distância de 51 metros de uma torre de energia elétrica. Se o ângulo que o cabo faz com o chão é de 32°, qual é o comprimento do cabo? (Utilize: sen 32° = 0,53, cos 32° = 0,85, tg 32° = 0,62)

8) João amarrou uma corda no ponto mais alto de uma árvore. Posteriormente, deslocou-se segurando a corda até certa distância de onde, com seu Astrolábio, a observou sob um ângulo de 18°. Agora João precisa saber qual a altura (h) da árvore e qual a distância (d) que ele se encontra dela. Ajude João a calcular as medidas que ele precisa, por meio das razões trigonométricas estudadas.



APÊNDICE D – Termo de consentimento do aluno

UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI – UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO

Convidamos para participar da pesquisa, que faz parte da Tese de doutorado intitulada "TECNOLOGIAS PARA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DA TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO", desenvolvida no Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* – Doutorado em Ensino, pelo doutorando Romildo Pereira da Cruz, tendo como orientadora a Professora Dra. Marli Teresinha Quartieri.

No caso de concordância em participar desta pesquisa, ficará ciente de que a partir da presente data:

✓ As informações coletadas nos testes de conhecimentos respondidos ao pesquisador serão utilizadas integral ou parcialmente, sem restrições, unicamente para fins de pesquisa científica;

✓ As imagens feitas durante as atividades poderão ser utilizadas como ilustração de trabalhos decorrentes da pesquisa por este pesquisador;

✓ Estará assegurado o anonimato nos resultados dos dados obtidos, sendo que todos os registros ficarão de posse do pesquisador por cinco anos e após esse período serão extintos.

Será garantido também, ao sujeito participante:

✓ Receber a resposta e/ou esclarecimento de qualquer pergunta e dúvida a respeito da pesquisa;

✓ Retirar seu consentimento a qualquer momento, deixando de participar do estudo, sem que isso traga qualquer tipo de prejuízo.

Assim, mediante termo de **Consentimento Livre e Esclarecido**, declaro que autorizo minha participação na pesquisa, por estar esclarecido e não me oferecer nenhum risco de qualquer natureza. Declaro, ainda, que as informações fornecidas nessa pesquisa podem ser usadas e divulgadas no Programa de Pós-graduação *stricto sensu*, Doutorado em Ensino, na Universidade do Vale do Taquari – UNIVATES, bem como nos meios científicos, publicações eletrônicas, impressas e apresentações profissionais.

____

Responsável pelo participante

Lajeado – RS, ____ de _______________ de 2019.

Pesquisador: Romildo Pereira da Cruz, E-mail: **romildo.cruz@universo.univates.br**

APÊNDICE E – Termo de Consentimento do Professor

UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI – UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO

Convidamos para participar da pesquisa, que faz parte da Tese de doutorado intitulada "TECNOLOGIAS PARA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DA TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO", desenvolvida no Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* – Doutorado em Ensino, pelo doutorando Romildo Pereira da Cruz, tendo como orientadora a Professora Dra. Marli Teresinha Quartieri.

No caso de concordância em participar desta pesquisa, ficará ciente de que a partir da presente data:

✓ As informações coletadas nos testes de conhecimentos respondidos ao pesquisador serão utilizadas integral ou parcialmente, sem restrições, unicamente para fins de pesquisa científica;

✓ As imagens feitas durante as atividades poderão ser utilizadas como ilustração de trabalhos decorrentes da pesquisa por este pesquisador;

✓ Estará assegurado o anonimato nos resultados dos dados obtidos, sendo que todos os registros ficarão de posse do pesquisador por cinco anos e após esse período serão extintos.

Será garantido também, ao sujeito participante:

✓ Receber a resposta e/ou esclarecimento de qualquer pergunta e dúvida a respeito da pesquisa;

✓ Retirar seu consentimento a qualquer momento, deixando de participar do estudo, sem que isso traga qualquer tipo de prejuízo.

Assim, mediante termo de **Consentimento Livre e Esclarecido**, declaro que autorizo minha participação na pesquisa, por estar esclarecido e não me oferecer nenhum risco de qualquer natureza. Declaro, ainda, que as informações coletadas nessa pesquisa podem ser usadas e divulgadas no Programa de Pós-graduação *stricto sensu* – Doutorado em Ensino, da Universidade do Vale do Taquari – UNIVATES, bem como nos meios científicos, publicações eletrônicas, impressas e apresentações profissionais.

____
Professor participante da pesquisa

Lajeado – RS, ____ de _______________ de 2019.

Pesquisador: Romildo Pereira da Cruz, E-mail: **romildo.cruz@universo.univates.br**

APÊNDICE F – Sequência didática[20]

Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Parte I

Etapa 1 – Para a intervenção, antes de qualquer contextualização, deve-se considerar um instrumento de sondagem que, em nosso caso, foi a aplicação de um teste de conhecimentos que apresentamos no Apêndice B e a construção de um mapa conceitual. A intenção do uso dos instrumentos foi identificar indícios dos conhecimentos prévios dos alunos, caso existissem. No seguimento, de acordo com a proposição da *sequência didática,* trabalhamos um texto que contextualizou a História da Matemática implícita ao conteúdo. Para esta sequência, o texto foi organizado pelo pesquisador de acordo com o seu referencial utilizado na escrita da tese, buscando por meio desse atingir o objetivo almejado para essa fase de aplicação. O título elencado para o texto, foi:*Voltando ao passado para compreender o presente da Trigonometria"* (Anexo A):

Observação – Se a opção do professor for trabalhar, inicialmente, com um texto, ele deverá estabelecer antencipadamente, o objetivo a ser alcançado com a contextualização. Apresentamos o texto em voga no Anexo A.

Objetivos da etapa 1

- Debater a evolução histórica das noções de trigonometria.
- Incentivar os alunos na identificação de aplicações do conceito de trigonometria.
- Fomentar discussões para reflexões sobre a importância do estudo da história da trigonometria.
- Proporcionar momentos para exposição de ideias e posicionamentos.

Material utilizado – Texto impresso, projetor multimídia, quadro branco, papel e lápis.

Síntese dos procedimentos

- Aplicação do teste de conhecimentos (APÊNDICE E);
- Leitura compartilhada do texto;
- Provocações (questionamentos) do investigador;
- Pesquisa na *internet* e/ou livros da biblioteca da escola;
- Roda de conversas e discussões em razão dos questionamentos elencados pelos alunos;
- Retomada dos principais tópicos do texto com apresentação de um Quadro evolutivo do conceito de *Trigonometria* pelo pesquisador concatenado a discussão do grande grupo.

Relato – Para dar-se início à abordagem, a atividade poderá ser precedida de aplicação de um instrumento de coleta de dados, com vista a identificação de subsunçores e/ou conhecimentos prévios dos alunos (para a intervenção utilizamos um teste de ocnhecimentos com quatro questões, citado anteriormente), caso

[20] Ao contextualizarmos a sequência didática trataremos o verbo em dois tempos distintos: a) no futuro para proposições a serem desenvolvidas para a validação da sequência, 2019/9; b) no passado quando nos referirmos ao Projeto Piloto, 2018/B.

existam. Após o recolhimento do teste de conhecimentos, mudar a configuração de carteiras enfileiradas (forma círculo, semicírculo, pequenos grupos, como fazem os contadores de história), modificando a estrutura habitual da sala de aula. No seguimento, explicitar as orientações acerca da atividade e convidar os alunos para uma leitura compartilhada. Em meio à leitura, fazer questionamentos referentes ao texto, como: *A Trigonometria sempre esteve junta a Matemática durante sua história? Vocês consideram importante conhecer por meio da história o surgimento de alguns conteúdos? Se sim. Porque? Quais contribuições de aplicações vocês já identificaram? Por que os gregos a chamavam de trilaterometria?.* Nesse momento, caberá ao professor apenas o papel de mediador – sem dar respostas prontas ou fazer quaisquer interpretações, incentivando os alunos a refletirem e manifestarem suas opiniões. A intenção é que eles, a partir das provocações, possam ir elaborando (construindo) esquemas de assimilação dos conceitos implícitos no texto.

Ao final dessa discussão, propor aos alunos que façam uma pesquisa na *internet* ou em livros na própria biblioteca do colégio para verificarem quais outras contribuições da Trigonometria podem ser identificadas, além das mencionadas no texto. Feita a pesquisa, o assunto poderá ser retomado, agora em roda de conversas com as contribuições dos alunos e nova discussão no grande grupo. Nesse momento, o professor/mediador terá um papel mais ativo, dividindo com os alunos a responsabilidade de construção de seus conhecimentos. Nele o professor/mediador poderá tirar dúvidas relacionadas ao texto anteriormente lido, assim como esclarecer situações advindas da pesquisa individual sugerida.

Em nosso caso, destacamos aqui alguns questionamentos que emergiram desse momento de interação: *O que o relógio solar tem haver com a trigonometria? Como pôde ser usada a semelhança de triângulos para medir a altura das pirâmides do Egito? Como podemos usar a trigonometria para a divisão de Terra? Como era possível que os babilônios conhecessem o teorema de Pitágoras antes de Pitágoras? Qual a diferença entre trigonometria aritmética e geométrica?.*

Cheios de interrogações, o momento poderá ser valioso para que o mediador, gradativamente, possa ajudar na expansão dos subsunçores de seus alunos (espera-se que os primeiros posicionamentos sejam de alunos do grande grupo para, posteriormente o mediador intervir). Para finalizar a ação, o professor/mediador poderá fazer uma síntese dos principais tópicos elencados e discutidos sobre a importância de se estudar *Trigonometria*, ressaltando sua utilização no dia a dia desde as antigas civilizações. Em nossa abordagem, apresentamos um quadro evolutivo do conceito de *Trigonometria* retratado no Quadro 5 relacionando-o com os questionamentos e discussões levantadas pelo grande grupo.

Observação – Concluída a atividade do texto, para dar seguimento ao trabalho, será necessário que o professor/mediador tenha certeza dos conhecimentos prévios dos alunos. Para a construção da atividade sucessora (Paralelismo), os alunos deverão ter noções de ponto, reta, segmento, segmentos proporcionais e ângulos. Caso não haja convicção de que os alunos tenham ancorados tais conceitos, é importante retomar essas ideias antes de qualquer proposição. Ademais, é necessário que o aluno tenha bom conhecimento do conjunto dos números reais.

Etapa 2 – Nessa etapa, irá tratará do *Paralelismo, tema* que poderá ser iniciado por meio de aula expositiva dialogada (participação do aluno), perguntando aos alunos os conceitos de ponto, reta, segmento, segmentos proporcionais e ângulos, como possibilidade de ampliação dos conceitos mais primitivos para conceitos mais específicos.

Objetivos da etapa 2

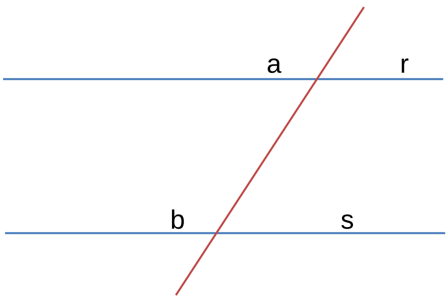
- Discutir a constituição das propriedades do paralelismo.
- Apresentar exemplo da propriedade descoberta por Tales.
- Analisar o significado geométrico do teorema de Tales.

Material utilizado – Projetor multimídia, quadro branco, canetões, papel e lápis.

Síntese dos procedimentos

- Aula expositiva dialogada.
- Discussão em grupo.
- Proposição de criação e resolução de situações-problema.

Relato – A partir da participação dos alunos e do encadeamento dos conceitos que emergirão da abordagem inicial do encontro, será oportuno ao mediador que também faça proposições acerca das propriedades de retas paralelas que versão sobre medida de ângulos e de segmentos. Nesse momento, a turma poderá ser questionada (espera-se que os alunos possam responder aos questionamentos): a) O que são retas paralelas? O são retas transversais?. Posteriormente, após, respondidas as questões, com canetões pode-se fazer o esboço gráfico do que foi externado verbalmente. O que poderá ter a seguinte característica:



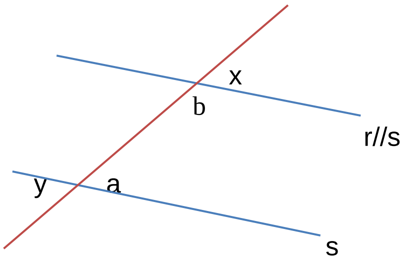
Feito o esboço, poderá ser questionado aos alunos: *Que tipo de ângulos são formados quanto uma reta transversal intercepta duas retas paralelas?* (espera-se que os alunos sejam capazes de responder). Caso negativo, é necessário criar outros mecanismos para os alunos perceberem que os ângulos **a** e **b** são correspondentes (pode-se usar por exemplo, dobraduras) e que isso se trata da primeira propriedade do *paralelismo*.

- Se as retas **r** e **s** são paralelas, os ângulos correspondentes **a** e **b** são iguais.

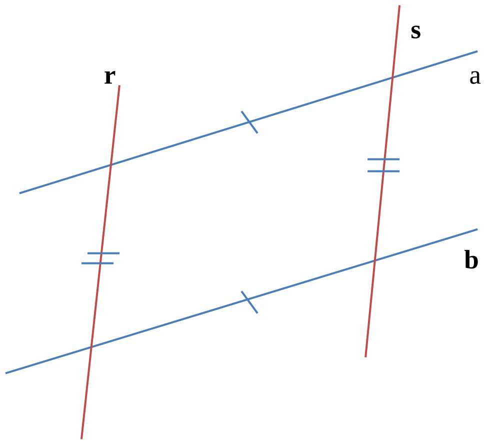
Feita a conclusão, inferimos que os alunos poderão desenvolver a seguinte atividade:

1. [21]Duas retas paralelas formam ângulos correspondentes iguais. Use esse fato e solicite que eles expliquem por quê:

a) x = y
b) a + b = 180°



Após a resolução da atividade pelos alunos e consequente discussão acerca das eventuais respostas, o professor poderá avançar por meio de questionamentos para construção da segunda propriedade do *paralelismo*. Pode-se perguntar aos alunos, por exemplo: *O que acontece se duas retas paralelas forem cortadas por duas outras retas paralelas?* (Espera-se resposta dos alunos, e, no mesmo molde da primeira propriedade, pode-se criar um esboço gráfico representativo no quadro branco, para em seguida, defini-la.).



a//b

r//s

- Se duas retas paralelas são cortadas por outras duas paralelas, forma-se um paralelogramo e seus lados opostos têm medidas iguais (a conclusão deve estar alinhada as hipóteses dos alunos).

Os alunos, de posse dessa informação, devem ser desafiados a *elaborarem uma situação-problema de aplicabilidade da propriedade explicitada.* Caso haja dificuldade na elaboração, pode-se permitir a consulta em livros e na *internet*.

Após a exploração das questões implícitas a segunda propriedade, perspectiva-se continuar instigando oralmente os estudantes. Para esta etapa, poderemos tomar como ponto de partida a seguinte situação: *Imaginem que temos dois segmentos de retas que se interceptam em um ponto comum, formando*

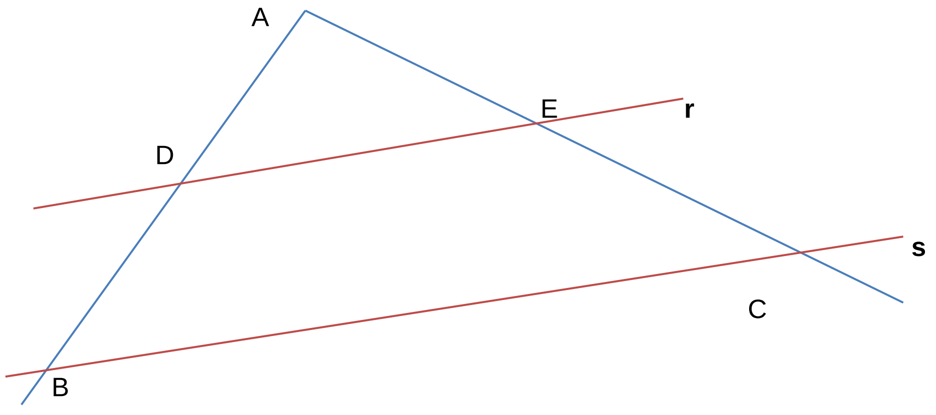
---

[21] IMENES, L. M. P. Matemática (Ensino Fundamental) – Atividades e exercícios, 2001, p. 207.

um ângulo qualquer e duas retas paralelas. Ao cortar esses segmentos em pontos distintos, sendo que uma passa pelas extremidades opostas ao vértice formado pela interseção dos segmentos, o que acontece? (Deixar que os alunos cheguem a alguma conclusão).

Observação – Após concluírem, solicitar aos alunos que criem um modelo numérico para comprovação aritmética da propriedade.

Em seguida usaremos o quadro branco para transformar em linguagem matemática o que será proferido de forma oral, até chegar a seguinte conclusão:

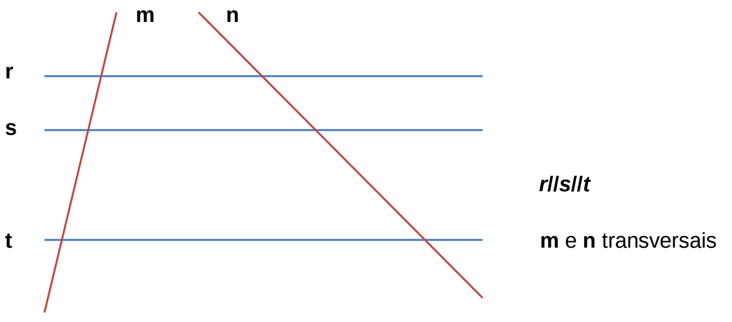


Se r//s, então os triângulos ABC e ADE são semelhantes. Por isso, as medidas dos seus lados são proporcionais.

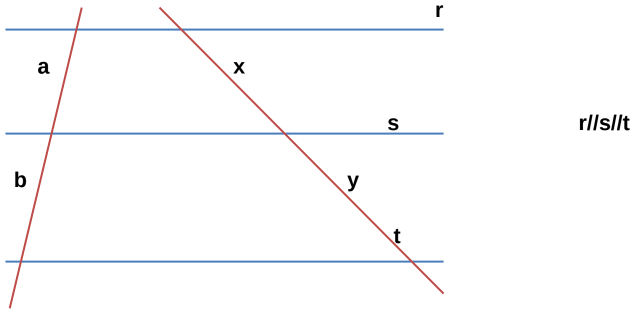
$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE}$$

Realizada a tarefa com a participação dos alunos, o professor deverá deduzir a partir desta, o teorema de Tales, que definimos a seguir:

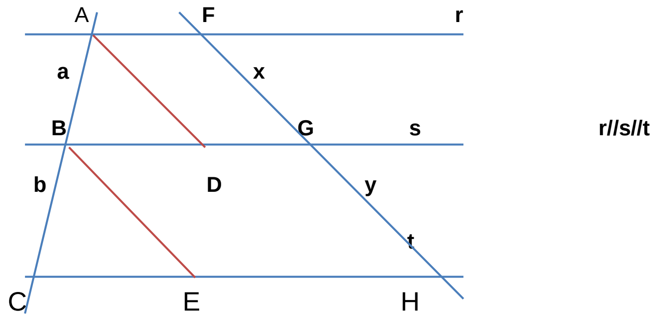
Teorema de Tales – Quando um feixe de retas paralelas é cortado por duas transversais, há proporcionalidade entre as medidas dos segmentos correspondentes que estão sobre as transversais.



A partir da definição (se precisar poderá resolver um exercício relacionado) é preciso esclarecer outro desdobramento do conceito. Sugerimos que se parta da seguinte figura:



Posteriormente, traça-se AD e BE, paralelos a FH e se obterá:



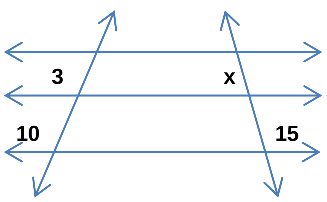
Com isso, concluir-se-á que os triângulos ABD e BCE são semelhantes porque, de acordo com a primeira propriedade estudada, têm ângulos iguais. Portanto, os alunos devem deduzir que:

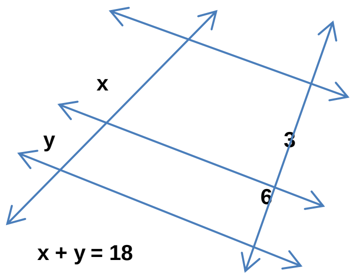
$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{BE} \ ou \ \frac{a}{b} = \frac{AD}{BE}$$

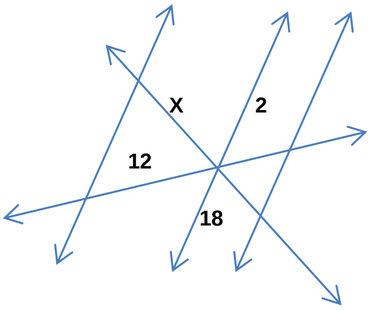
Ao mediador caberá conduzi-los à percepção de que estão implícitos à figura os quadriláteros ADGF e BEHG, que são paralelogramos. Os lados dos paralelogramos podem ser identificados a partir de: $AD = x \quad e \quad BE = y$. Ademais, dependendo do nível dos alunos, ainda será possível fazer outras deduções.

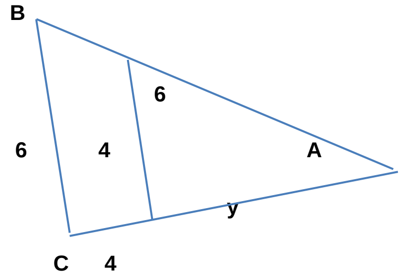
A partir da revisão das propriedades relativas ao paralelismo e a explicação verbal do teorema de Tales, acreditamos que o estudante será capaz de determinar razões entre segmentos proporcionais formados a partir de duas transversais que interceptam um feixe de retas paralelas. Ademais, perceberão que a proporcionalidade entre os segmentos ocorrerá independentemente da posição dos pontos de interseções das transversais com as paralelas. Para justificar as conclusões que os alunos chegarão, poderão ser trabalhados exercícios como os apresentados a seguir:

1. Nas figuras, use o teorema de Tales para encontrar o valor das variáveis:









Etapa 3 – Semelhança de triângulos retângulos

Conceitos prévios necessários – Identificação de ângulos e noções de proporcionalidade. Caso os alunos tenham assimilado os conceitos discutidos no encontro 2, supõem-se que eles já tenham, agora, uma razoável noção acerca do que são segmentos proporcionais.

Objetivos da etapa 3

- Demonstrar a semelhança de triângulos quando se traça a altura relativa à hipotenusa do triângulo retângulo.
- Deduzir algumas das relações métricas do triângulo retângulo.
- Resolver problemas envolvendo essas relações.
- Analisar o comportamento dos alunos quando inseridos em contexto que confronta conhecimento teórico com situação prática.

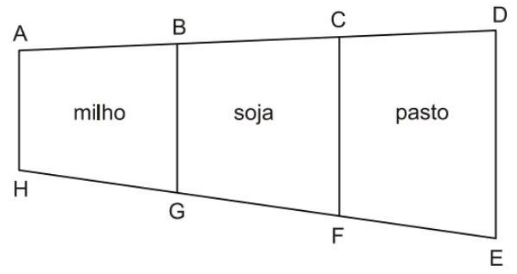
Material utilizado – Projetor multimídia, quadro branco, canetões, papel, lápis, régua, transferidor, esquadro, papel cartão, tesoura, calculadora, estacas, marreta, prego, fio de *nylon* e trena.

Síntese dos procedimentos

- Resolução de atividades em grupo.
- Aula de campo exploratória.
- Análise pelos alunos do emprego da semelhança de triângulos em situação prática.
- Proposição grupal de atividades construtiva com papel, tesoura e outros materiais.
- Discussão e apresentação da constituição das relações métricas no triângulo retângulo pelos alunos.
- Elaboração de um mapa conceitual.

Relato – A abordagem poderá ser dividida em três momentos: a) resolução e discussão de exercícios em sala de aula; b) proposição de uma atividade de campo exploratória para que o aluno possa explicitar e colocar em prática suas hipóteses; c) confecção de triângulos retângulos semelhante com uma folha de papel cartão (ou outro) quadrada, a partir de um dos enunciados do teorema de Haga. Devido às observações realizadas, apresentaremos a semelhança de triângulos retângulos de forma gradativa para possibilitar uma melhor compreensão do aluno. Dessa maneira, esperamos que os alunos percebam, passo a passo, a construção do conceito de semelhança por meio de suas próprias observações a partir das proposições das atividades que serão desenvolvidas em grupo as quais apresentaremos a seguir.

1. [22]Colégio Pedro II – 2012: Para melhorar a qualidade do solo, aumentando a produtividade do milho e da soja, em uma fazenda é feito o rodízio entre essas culturas e a área destinada ao pasto. Com essa finalidade, a área produtiva da fazenda foi dividida em três partes conforme a figura.



Considere que:

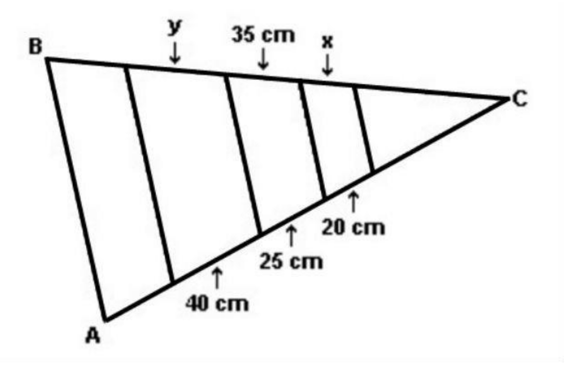
- Os pontos A, B, C e D estão alinhados;
- Os pontos H, G, F e E estão alinhados;
- Os segmentos AH, BC, CF, DE são, dois a dois, paralelos entre si;
- AB = 500 m, BC = 600 m, CD = 700 m e HE = 1980 m.

Nessas condições, a medida do segmento GF é, em metros:

a) 665. b) 660. c) 655. d) 650. e) 645.

Observação: Os alunos devem justificar a resposta.

2. [23]Cefet/PR – 2006: O jardineiro Sr. Artur fez um canteiro triangular composto por folhagens e flores onde as divisões são todas paralelas à base.



Sendo assim, as medidas x e y dos canteiros de flores são, respectivamente (instigar os alunos a justificarem verbalmente a resposta encontrada):

[22] Disponível em: https://www.todamateria.com.br/teorema-de-tales-exercicios/
[23] Disponível em: https://www.todamateria.com.br/teorema-de-tales-exercicios/

a) 30 cm e 50 cm.
b) 28 cm e 56 cm.
c) 50 cm e 30 cm.
d) 56 cm e 28 cm.
e) 40 cm e 20 cm.

Observação – Utilizaremos os conhecimentos estudados no teorema de Tales e relacionaremos à semelhança de triângulos. Por intermédio das discussões e atividades contextualizadas, desejaremos que os estudantes observem as proporcionalidades entre os lados dos triângulos a partir das proporções estudadas no teorema de Tales. Ao término da atividade, é importante que o professor realize uma discussão, incentivando os alunos a comentarem suas respostas, de forma a esclarecer eventuais dúvidas.

No segundo momento, que compreenderá uma saída exploratória a campo, é de se desejar que os alunos compreendam a congruência dos ângulos correspondentes em triângulos semelhantes, conduzindo-os a observar, através da experimentação, que as razões iguais entre lados de um triângulo estão diretamente associadas à correspondência entre seus ângulos. A pretensa atividade enfatizará o papel da visualização e manipulação. Nessa, utilizaremos triângulos semelhantes obtendo razões iguais e razões distintas entre seus lados com o propósito de motivar os alunos a concluírem que dois triângulos semelhantes possuem lados homólogos proporcionais e ângulos correspondentes congruentes.

Para o desenvolvimento da atividade citada, o professor deve ter clareza quanto aos objetivos que deseja alcançar. Nessa proposição, tencionaremos que aos alunos seja oportunizado um momento em que eles possam vivenciar na prática aquilo que já tenham comprovado teoricamente. Em nosso caso, para sua realização contatamos uma pequena empresa de jardinagem próxima do colégio. Trabalhamos com estacas, marreta, pregos e fio de *nylon* (como descrita na seção 3.3). Nessa os alunos tiveram a oportunidade de manipular o material, conjecturar, fazer, refazer, ser protagonista do próprio conhecimento, possibilitando a transposição e ampliação dos conceitos internalizados acerca do assunto.

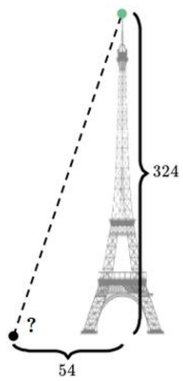
Dessa forma, para o encerramento da intervenção, o professor poderá solicitar que cada aluno ou grupo de alunos redija uma situação-problema que esteja relacionada à atividade exploratória vivenciada em campo (trabalhamos com grupos de 4 alunos).

Os problemas apresentados pelos alunos devem ser discutidos e resolvidos por eles mesmos. Em sala de aula, os alunos deverão apresentar e discutirão com a mediação do investigador, algumas das situações construídas. Passado esse momento, por meio de uma aula expositiva dialogada, o professor poderá apresentar desenhos de alguns triângulos semelhantes, outros não, a partir da discussão sobre as condições para que sejam considerados semelhantes, e resolução de alguns exercícios (em nosso caso foram utilizados os da apostila dos alunos) é possível se fazer uma ligação com o teorema de Pitágoras.

Para a revisão do Teorema, foi utilizada uma atividade exploratória que se iniciou com o desenho do triângulo de lados 3, 4 e 5 unidades, sobre os quais se desenhou um quadrado, para a indução de que a área do quadrado de lado 5 é igual à soma das áreas dos quadrados de lados 3 e 4. Depois foram feitos mais alguns desenhos, com os quais calcularam os respectivos comprimentos relativos aos catetos e às hipotenusas, estendendo o resultado para outros triângulos retângulos, empiricamente, e finalizando com a resolução de alguns exercícios sobre teorema de Pitágoras.

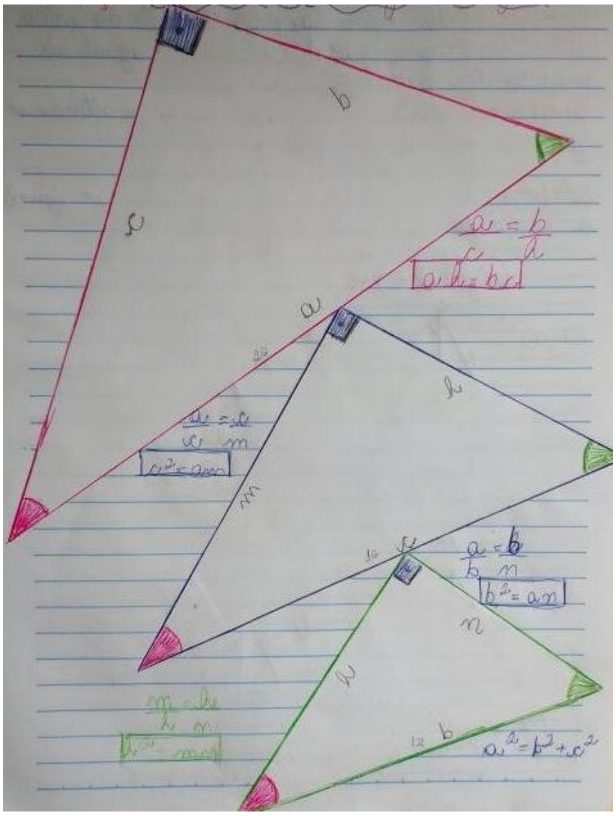
No percurso da atividade citada, o professor poderá optar ou não pela realização da demonstração formal do teorema em foco. Durante o processo optamos por não desenvolvê-la, pois a intenção era deixar que os estudantes construíssem seus conhecimentos e refletissem acerca do processo. Em nosso caso, os alunos desenvolveram algumas atividades, a exemplo da que apresentamos a seguir:

1. [24] Um pequeno, porém horrível, alienígena está no topo da Torre Eiffel (que tem 324 metros de altura) e ameaça destruir a cidade de Paris! Um agente da MIB está no nível do chão, a 54 metros da Torre Eiffel, mirando sua arma a laser no alienígena.
   Qual a distância, *em metros*, entre o agente e o Alien? *Arredonde sua resposta final para a primeira casa decimal.*



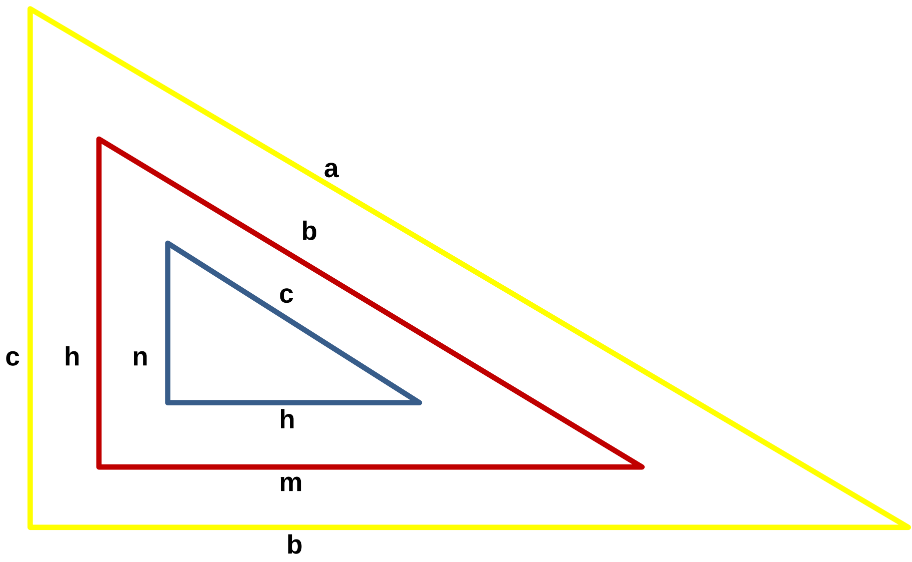
No terceiro momento, tencionaremos que os alunos deduzam as relações métricas no triângulo retângulo. Nesse caso, solicitaremos que desenhe com régua e compasso, dois triângulos de mesma medida: 12, 16 e 20 cm. Para isso, farão um segmento de reta de 20 cm com o uso da régua, abrirão o compasso em 16 cm, colocando a ponta seca na extremidade do segmento de 20 cm e marcando com um traço os 16 cm, logo após abrirão em 12 cm e colocando a ponta seca na outra extremidade, marcarão sobre o traço de 16 cm, formando um dos vértices do triângulo. Em seguida, verificarão se esses triângulos são retângulos, ou seja, se é válida a relação do teorema de Pitágoras. Um deles será preservado e o outro será recortado, sendo dividido em 2 triângulos, com um recorte na altura em relação à hipotenusa (obtida pela própria dobradura pelo vértice do ângulo reto e a base na hipotenusa). Posteriormente, serão nomeados os lados e destacados os ângulos, conforme registro capturado de um aluno:

[24] https://pt.khanacademy.org/math/trigonometry/trigonometry-right-triangles/modeling-with-right-triangles/e/applying-right-triangles



De acordo com a atividade exploratória, solicitaremos que os três triângulos sejam colocados com a mesma posição relativa ao ângulo reto e, em seguida, que encaixem os ângulos, sobrepondo os recortes de papel, para verificarem se terão a mesma medida. Após a verificação, os alunos concluírão que são triângulos semelhantes, pelo caso AAA e, novamente com a mesma posição relativa, irão escrever as razões e proporções encontradas, por lados homólogos, com a *mediação* de perguntas feitas pelo professor.

Mediante a contextualização e discussão acerca da interpretação da atividade, os alunos poderão identificar de forma algébrica, por meio da semelhança entre triângulos retângulos, as relações métricas implícitas como já atestada na imagem anterior. Durante o procedimento, deverão ser lançadas perguntas com o objetivo de encorajar o aluno a caminhar com o seu raciocínio e levá-lo a avançar para formas superiores de pensamento (no caso, alcançando as relações de proporção e as relações métricas gerais em um triângulo retângulo, as quais não conheciam previamente). Pela multiplicação das razões de semelhança, espera-se que os alunos cheguem às relações apresentadas a seguir.



T_1 e T_2

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} = \frac{c}{h} \quad \left\{ \begin{array}{l} b^2 = a\,.\,m \\ b\,.\,h = m\,.\,c \\ a\,.\,h = b\,.\,c \end{array} \right.$$

T_2 e T_3

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{n} \quad \left\{ \begin{array}{l} a\,.\,h = b\,.\,c \\ a\,.\,n = c^2 \\ b\,.\,n = c\,.\,h \end{array} \right.$$

T_2 e T3

$$\frac{b}{c} = \frac{m}{h} = \frac{h}{n} \quad \left\{ \begin{array}{l} b\,.\,h = m\,.\,c \\ b\,.\,n = c\,.\,h \\ h^2 = m\,.\,n \end{array} \right.$$

$$b^2 + c^2 = a\,.\,m + a\,.\,n$$

$$\underbrace{b^2 + c^2} = a\underbrace{(m + n)}_{\textbf{a}}$$

$$b^2 + c^2 = a\,.\,a$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

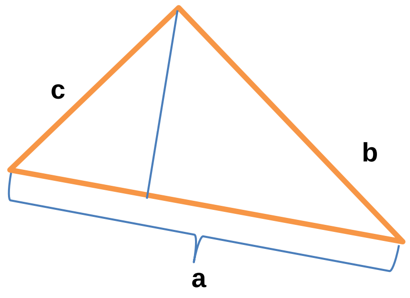
a = hipotenusa; **c** e **b =** catetos; **h =** altura.

m = projeção do cateto *b* sobre a hipotenusa.

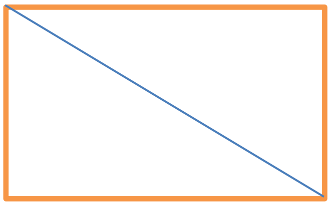
n = projeção do cateto *c* sobre a hipotenusa.

Após dedução, o professor também poderá solicitar que os alunos descrevam, com as próprias palavras, o que significa cada relação trigonométrica, a partir dos catetos, da hipotenusa, da altura do triângulo e suas projeções sobre a hipotenusa. Para fixação, poderão ser feitos exercícios em que outros triângulos serão nomeados, com letras diferentes, e alguns problemas de aplicação (a escolha do professor). Durante o desenvolvimento da sequência didática utizamos as questões apresentadas a seguir como auxiliares a fomentação de discussões.

1. Calcular as medidas desconhecidas.



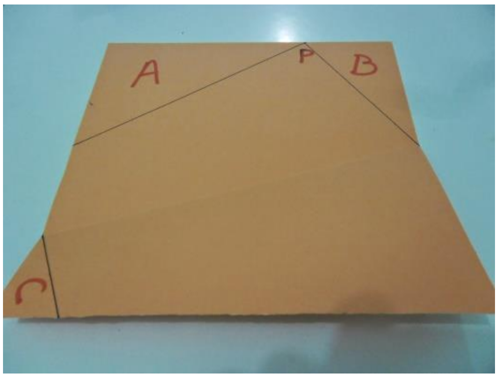
2. O perímetro de um retângulo é 30 cm, um dos lados mede 6 cm. Calcular a diagonal.



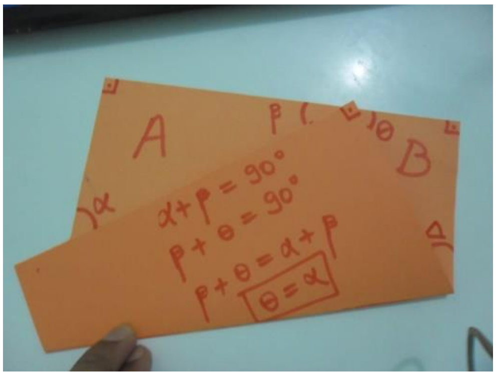
3. O perímetro de um triangulo equilátero mede 24 cm. Calcular a altura.

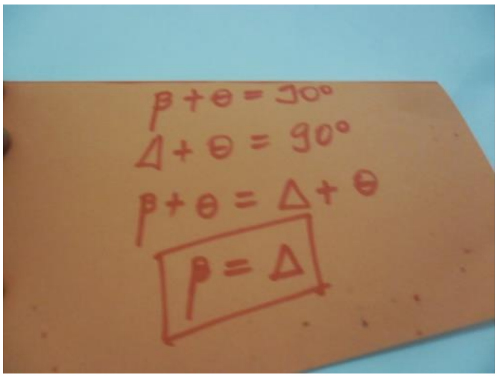
4. Calcular a área de um quadrado cuja diagonal mede 5 $\sqrt{2}$ cm.

Posteriormente ao desenvolvimento e discussão das atividades anteriores, ainda será possível introduzir uma segunda atividade exploratória, complementar a já contextualizada, confeccionando triângulos retângulos semelhantes, a partir de dobraduras e recortes de uma folha de papel quadrada, seguindo um dos enunciados do teorema de Haga. Após o término desta, sugerimos que o professor realize uma discussão a partir das observações dos alunos quanto ao que eles perceberão depois que recortarem as figuras, de forma a esclarecer eventuais dúvidas e ratificar a proporcionalidade observada na semelhança de triângulos. Um dos enunciados do teorema de Haga nos diz que, *em uma folha de papel quadrada, se considerarmos um ponto P qualquer na parte superior da folha e dobrarmos um vértice inferior de modo que coincida com o ponto P, formam-se três triângulos semelhantes.* Logo, para se rediscutir o assunto, os alunos poderão construir inicialmente os triângulos semelhantes a partir do enunciado do teorema.



Os triângulos A, B e C são semelhantes.





E de forma empírica, após recortar os três triângulos, poderão comparar ângulo a ângulo. A intenção é não apenas que o aluno siga as instruções e execute-as, mas que experimente e reflita sobre elas. Sempre que possível, o aluno deverá verbalizar suas próprias conclusões com seus colegas. O professor orientador tem um papel importante não só em aprofundar as discussões, trazendo novas situações e problemas, mas também apresentar fatos geométricos e conceitos que poderão ser explorados a partir das construções. Com vista a verificar se os alunos estarão introspectando os conceitos e organizando sistematicamente o aprendizado, o professor poderá avaliá-los por meio de algum instrumento que possa identificar a apropriação das proposições. Em nosso caso, solicitaremos que elaborem um mapa conceitual.

Observação: Para execução dessa Parte I da sequência estimamos 7 períodos de aula de 50 minutos cada.

Parte II

Etapa 4 – Com vista a avançar nas discussões acerca dos conceitos envolvidos na *trigonometria do triângulo retângulo,* sugerimos ao professor que trabalhe a partir desta, uma atividade de campo que deverá ser realizada com uso de hastes de tamanhos variados e outros pontos altos de referência com intuito de ampliar a percepção dos alunos acerca dos conceitos de semelhança e proporcionalidade. Posteriormente a abordagem pode-se sugerir a leitura do texto intitulado *Astrolábio* apresentado no Anexo B e consequentemente, propor a construção e utilização do *Astrolábio* apresentado no anexo C em atividade de campo.

Objetivos da etapa 4

- Construir os conceitos das razões trigonométricas.
- Debater a importância histórica do instrumento Astrolábio.
- Aludir acerca do propósito da sua utilização.

Material utilizado – Hastes, martelos, trenas**,** texto impresso, projetor multimídia, quadro branco, papel, lápis.

Síntese dos procedimentos

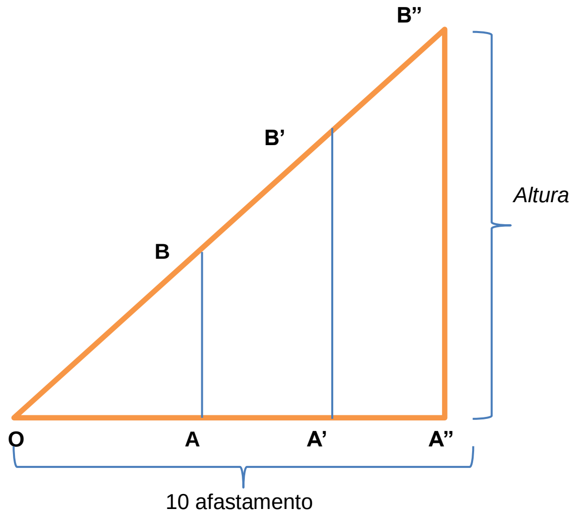
- Atividade de campo.
- Leitura.
- Aula expositiva dialogada, com apresentação da evolução histórica do instrumento *Astrolábio* a partir da contextualização da leitura de texto.
- Apresentação aos discentes, como o homem antigo se localizava no Planeta Terra, utilizando o Astrolábio.
- Discussão acerca da importância do *Astrolábio* com o grande grupo.

Relato – Para criar um ambiente em que os alunos possam visualizar e descrever as questões observadas na etapa 3 da Parte I dessa proposta, pode-se desenvolver, uma atividade utilizando hastes de tamanhos variados. Com a atividade tencionou-se a construção do conceito de *tangente*. Como já descrito apresentamos um conjunto hastes (varetas) de tamanhos variados aos alunos. De posse destas, em grupos, os alunos serão convidados a seguirem para o pátio do colégio e fixar as varetas de vários comprimentos, verticalmente, no chão. Esta ação será seguida de observação e mensuração das hastes e suas respectivas sombras Após alguns questionamentos os alunos deverão chegar à conclusão de que as varetas e as sombras projetadas estão relacionadas com os catetos de um triângulo retângulo.

Após discussão acerca das hipóteses e constatação de que se trata de triângulos semelhantes, solicita-se que construam um Quadro e que nele registrem as medidas das varetas com suas respectivas sombras, já que os triângulos retângulos cujos catetos são as hastes e as sombras podem ser considerados semelhantes e as razões entre os catetos serem iguais.

Após analisarem a razão de proporcionalidade existente entre os lados dos triângulos formados pelas hastes e suas respectivas sombras, os alunos deverão perceber que, independente do tamanho da vareta e de sua projeção, existe uma constante *(c)* que está relacionada a razão $\frac{cateto\ oposto\ a \propto}{cateto\ adjacente\ a \propto}$. Tal observação só é possível devido o grau de inclinação de o Sol incidir sobre as hastes ser o mesmo no instante (*t*). Dessa forma, chegaremos à conclusão do que denominamos de *tangente* de $\propto$.

No seguimento, em busca de concatenar o atual momento com os anteriores discutidos e ampliar a visão conceitual de construção do *seno* e do *cosseno*, o professor poderá solicitar aos alunos que desenhem um ângulo de 40º, e nesse, que desenhem três triângulos com alturas diferentes e, posteriormente, que observem a imagem e preencham o quadro que segue:



Preencha o quadro:

Triângulo	Afastamento	Altura	Distância	$\frac{afast.}{dist.}$	$\frac{alt.}{dist.}$	$\frac{alt.}{afast.}$
OAB						
OA´B´						
OA´´B´´						

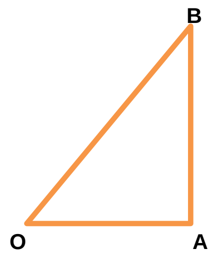
Os alunos realizarão as medições com régua nos triângulos recortados e calcularão as respectivas taxas usando uma calculadora. Presumimos que eles concluirão que os valores não mudam, apesar de apresentarem pequenas variações nos cálculos, em cada uma das relações, porque é mantida a abertura do ângulo. A partir dessas observações que devem ser elencadas pelos alunos e após discussão acerca do acontecimento. Em seguida, poderá ser nomeada cada uma dessas relações com respeito a abertura do ângulo *x*: *sen x*; *cos x* e *tg x*.

Após o preenchimento do quadro, o professor, por meio de questionamentos, poderá auxiliar os alunos a reconhecerem que as proporcionalidades estabelecidas em relação aos lados dos triângulos tratam-se das razões trigonométricas fundamentais (é esperado que os alunos possam perceber tais relações) e que concluam que:

$\frac{afastamento}{distância}$ = cosseno ângulo = cos α

$\frac{altura}{distância}$ = seno ângulo = sen α

$\frac{altura}{afastamento}$ = tangente ângulo= tg α



OA= cateto adjacente (afastamento)

AB= cateto oposto (altura)

OB= hipotenusa (distância)

sen α= $\frac{cat.op.}{hip.}$ cos α= $\frac{cat.adj.}{hip.}$ tg α= $\frac{cat.op.}{cat.adj.}$

Posterior às discussões acerca da composição das identidades das razões trigonométricas, estima-se que os alunos sejam capazes de desenvolverem as atividades que apresentamos a seguir:

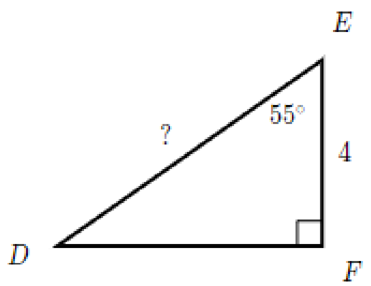
1. Desenhar os seguintes ângulos e calcular *sen, cos* e *tg*.

a) 30º b) 60º c) 20º

2. Calcular *sen, cos, tg* dos ângulos agudos de um triangulo retângulo, cujos catetos medem:

a) 3 cm e 4 cm b) 4 cm e 5 cm

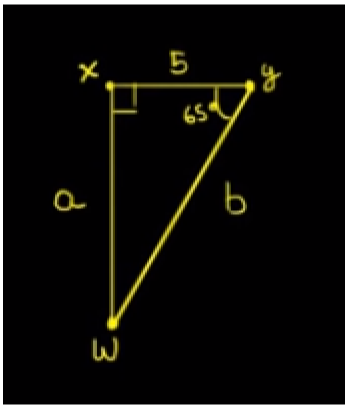
3. Dado △DEF, calcule DE. Use sua calculadora científica e arredonde sua resposta para a segunda casa decimal.



4. Estabeleça as medidas dos três lados dos triângulos, formados a partir das seguintes informações:

$a)\ sen\ \alpha = \frac{3}{5}$ $b)\ tg\ \beta = \frac{4}{3}$ $c)\ \cos\theta = \frac{1}{2}$ $d)\ sen\ \alpha = \frac{7}{5}$

5. [25]Calcule *a* e *b* no triângulo retângulo abaixo. Use a calculadora e arredonde os comprimentos para a casa decimal mais próxima:



6. Uma rampa lisa com 10 cm de comprimento faz ângulo de 30º com o plano horizontal. Uma pessoa que sobe essa rampa inteira, eleva-se a quantos metros verticalmente?

Após o desenvolvimento das atividades, apresentaremos e solicitaremos dos alunos a leitura de um texto denominado de Astrolábio apresentado no Anexo B. A partir da leitura, o professor deverá buscar subsídios para a fundamentação dos conceitos das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. Tais dados poderão ser explorados por meio de questionamentos do tipo: a) Vocês identificaram no texto quais as principais contribuições do Astrolábio? Imaginam como o instrumento pode ser utilizado hoje? Quais os principais parâmetros que devemos considerar ao usarmos um Astrolábio? Por meio dos questionamentos, ainda é possível discutir com os discentes, como o homem antigo se localizava no Planeta Terra, utilizando o Astrolábio. Tal tratativa poderá ser realizada por roda de conversa que envolva todo o grupo de alunos. Após o dessecamento do texto, para a etapa seguinte, tenciona-se que o aluno compreenda os mecanismos de funcionamento do Astrolábio. Para que tal fato ocorra, o professor poderá propor a confecção do instrumento em sala de aula, a partir da utilização de material de baixo custo. A atividade de confecção poderá ser desenvolvida no encontro seguinte.

[25] Adaptado de: https://pt.khanacademy.org/math/geometry/hs-geo-trig/hs-geo-solve-for-a-side/v/example-trig-to-solve-the-sides-and-angles-of-a-right-triangle

Etapa 5 – Nessa etapa, o professor deverá propor a confecção do *Astrolábio* visando uma atividade prática, de campo. Tal atividade deve ter como objetivo a experimentação e utilização do instrumento em situações reais. Para concretização desse momento é preciso construir o *Astrolábio.*

Objetivos

- Construir um *Astrolábio* com alunos do Ensino Fundamental.
- Discutir com os alunos a possibilidade de utilização do instrumento construído para medir alturas.
- Envolver os alunos em situações práticas de aplicação e reconhecimento do conceito *tangente.*
- Trabalhar situações-problema redigidas pelos alunos (preferencialmente).

Material utilizado – projetor multimídia, quadro branco, papel, lápis, transferidor, peso (um clip ou chumbada), fita adesiva ou cola quente, fio de nylon, alfinete ou uma agulha, canudo ou tubo de caneta ou similar.

Síntese dos procedimentos

- Aula expositiva dialogada.

- Proposição de construção e confecção de um *Astrolábio* rudimentar para testar sua eficiência prática em campo na obtenção da *tangente* de um ângulo desconhecido.

- Proposição, apresentação e discussão de situações-problema pelos alunos com mediação do professor/mediador.

Relato – Em sala de aula, os alunos deverão ser convidados a confeccionarem um *Astrolábio*. As orientações necessárias para a construção do instrumento que utilizaremos são apresentadas no Anexo C dessa sequência.

Terminada a confecção, o professor deverá aludir sobre a utilização do instrumento e propor atividades onde o *Astrolábio* poderá ser testado ainda em sala de aula, a exemplo: calcular a altura do chão até a parte de cima da lousa. Após a testagem, os alunos deverão ser conduzidos para a parte externa do colégio e, em duplas, para facilitar o trabalho, deverão encontrar o ângulo de inclinação de um objeto determinado pelo professor ou por curiosidade do aluno. Preferencialmente, deverão optar por um objeto alto o suficiente para que precise de mais que uma simples escada para medi-lo, a exemplo: calcular a altura do prédio da escola.

Para o desenvolvimento da atividade, um dos alunos segurará o instrumento enquanto o outro medirá os ângulos encontrados. Após anotação das medidas em um quadro que deverá ser criado por eles, os alunos deverão perceber que podem ser utilizados os conceitos das razões estudadas anteriormente. Assim, há a possibilidade de se usar as razões trigonométricas para a obtenção da altura desejada. Nesse sentido, os conceitos trigonométricos poderão ser utilizados para calcular alturas e distâncias de objetos pelo ângulo obtido com o astrolábio utilizando as relações aprendidas.

Após esta atividade deve-se solicitar que os alunos criem, individualmente ou em grupo, situações-problema a partir de suas experiências e observações feitas na aula exploratória de campo. Essas atividades deveram ser acompanhadas de possíveis soluções e discutidas suas viabilidades com o grande grupo. Para execução de todas as atividades da Parte II da sequência, estimamos de 7 períodos de aula de 50 minutos cada um.

Parte III

Etapa 6 – Construção do triângulo apoiada pelo *GeoGebra* foi dividida em 02 momentos: a) construção do triângulo; b) discussão das questões de visualização inerentes a construção.

Etapa 7 – Cálculo de inclinação de ruas. Para verificar a autonomia dos alunos, as atividades deverão ser conduzidas a partir de tutoriais disponibilizados a eles pelo professor. Os questionamentos feitos durante a construção deverão estar voltados para identificação de indícios de *diferenciação progressiva* e *reconciliação integradora* dos conceitos estudados anteriormente, ou seja, a intenção é de verificar se os alunos aprenderam significativamente o conteúdo de *razões trigonométricas no triângulo retângulo*.

Observação: Quando os alunos não possuírem familiaridade com o *software*, o ideal é que o professor use algum período de aula antes tencionando que os estudantes possam manipular as principais ferramentas que o *GeoGebra* disponibiliza. Isso facilitará a abordagem futura. Em nosso caso, dado o conhecimento rudimentar dos discentes, utilizamos dois períodos de aula para exploração das possibilidades de construção com o *software.* Em seguida, orientamos de forma oral como as atividades se desenvolveriam a partir dos tutoriais que seguem:

Objetivos para as etapas 6 e 7

- Estimular os alunos a explorarem outras possibilidades de construção de conhecimento com tecnologias.
- Incentivar os alunos a perceberem que podem ser protagonistas do seu conhecimento.
- Reaplicar os instrumentos de coleta de dados (mapa conceitual e teste de conhecimentos final).

Material utilizado – Tutorial, projetor multimídia, *notebooks, tablets* ou celulares, *GeoGebra*.

Síntese dos procedimentos

- Retomada da discussão acerca das relações *seno, cosseno e tangente.*
- Aula expositiva dialogada.
- Utilização de *notebooks* e *tablets*.
- Uso de tutoriais apoiados por atividades exploratórias.
- Construção do triângulo retângulo e cálculo da inclinação de ruas.

Relato – As atividades poderão ser aplicadas visando a consolidação e expansão dos conhecimentos já adquiridos no decorrer das etapas anteriores. Em meio à atividade, o professor poderá retomar a partir das construções desenvolvidas com auxílio do *software*, o assunto das razões trigonométricas. Essas poderão ser discutidas sobre o ponto de vista visual, o que corroborará o mediador na possibilidade de poder ampliar a participação verbal dos alunos, citando novos exemplos e os desafiando constantemente com proposições pertinentes ao assunto.

O tempo estimado para o desenvolvimento das atividades pode variar de acordo com o grau de conhecimento e familiaridade dos alunos com o *software* (utilizamos 4 períodos de 50 cada). Na ocasião, após a construção com o *GeoGebra*, retomamos com os alunos a discussão acerca dos elementos do triângulo retângulo: catetos, hipotenusa, altura e projeções, realizando atividades de reconhecimento desses elementos e instigando-os a perceber a relação entre projeções e hipotenusa. Sobre este aspecto, o tema razões trigonométricas no triângulo retângulo deverá ser abordado em aspectos mais gerais e com maior complexidade em relação às situações anteriores já experenciadas pelos alunos.

Nesse sentido, o professor poderá relacionar objetos, elementos e situações das razões trigonométricas com questões do dia a dia. A finalidade será a de despertar a curiosidade do aluno, buscando uma interação das concepções prévias com o tema.

Ao término de cada atividade proposta na *sequência didática*, deverá ser realizada uma nova apresentação dos significados do tema e, em seguida, novas questões (a critério do professor) deverão ser desenvolvidas individualmente, através de questionamentos inseridos no tutorial sobre o tema. O desenvolvimento do tema será seguido de discussões colaborativas, entre o aluno e o professor, com posterior apresentação e discussão no grande grupo, mediado pelo professor/investigador.

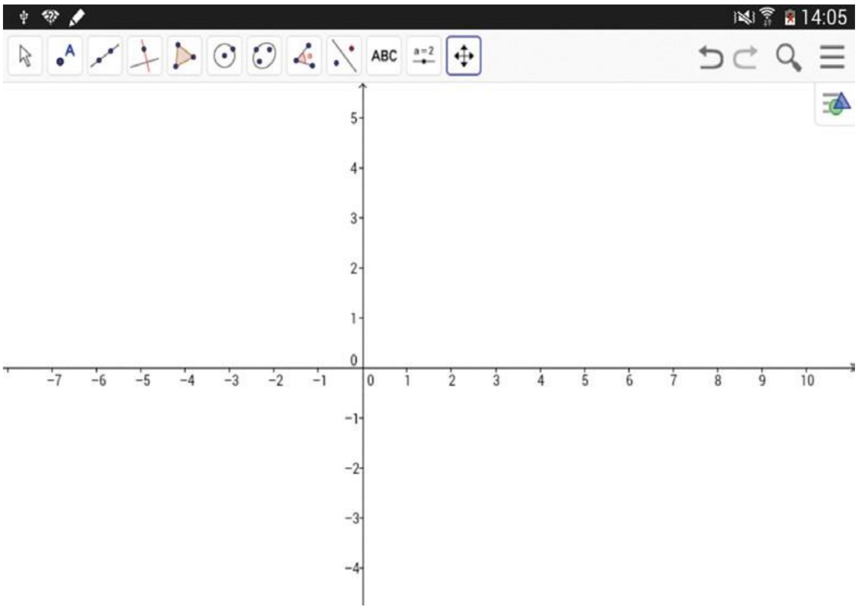
A intenção com a proposta será possibilitar a reconciliação integradora através de estratégias colaborativas que levem o aluno a interagir, negociando significados e usufruindo de um número maior de subsunçores, tendo sempre, o professor como mediador. Dessa forma, os alunos poderão ter uma visão mais detalhada do conteúdo e do conhecimento já adquirido. Para verificar se tais pressupostos se confirmarão, utilizaremos dois instrumentos de coleta de informações para nos certificarmos dos indícios de aprendizagem significativa ou não. Aplicaremos um questionário composto por três questões e solicitaremos que os alunos construam um mapa conceitual com auxílio do *software Cmaptools.*

Observação: Caso os alunos desconheçam as funcionalidades do software apresentado, será necessário que o professor reserve um tempo para a sua manipulação antes de usá-lo. Para o desenvolvimento das atividades relacionadas a Parte III, estimamos de 5 períodos de aula de 50 minutos cada. No entanto, para essa etapa final nos apropriamos de mais 2 períodos de aula de 50 minutos cada um. A necessidade originou-se do pesquisador ter de aplicar um questionário final relacionado as atividades, assim como também houve a construção do mapa conceitual final. A intenção de aplicação dos instrumentos, corroboram a percepção do autor, de que no percurso do desenvolvimento da *sequência didática* ocorreu uma evolução de assimilação conceitual dos alunos (*diferenciação progressiva*) e, incorporação de novos conhecimentos aos já integrados as suas estruturas cognitivas (*reconciliação integradora*). Dessa forma, utilizamos no total 7 períodos de aula de 50 minutos cada um para a conclusão da intervenção de ensino.

Construção do triângulo[26]

Abrir o *GeoGebra* e selecionar “Geometria”. Na Figura 1 aparece a tela inicial do *GeoGebra* com os seus menus e comandos.

Figura 1 – Tela inicial do *GeoGebra*



Fonte: Dos autores.

Para esta atividade, é necessário ocultar os eixos da tela principal. Se ao abrir o aplicativo a tela estiver como na Figura 2 seguir o passo da letra a, caso contrário ir para o passo da letra b.

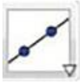
a) Pressionar a tela principal e desmarcar a opção Eixos conforme a Figura 2.

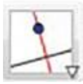
Figura 2 – Ocultar os eixos do *GeoGebra*

Fonte: Dos autores.

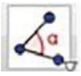
[26] Adaptada de PADILHA, T. A. F.; BRANCHIER, H. S. A trigonometria no triângulo retângulo por meio de recursos tecnológicos. In: Aproximando a Matemática e a Física por meio de recursos tecnológicos: Ensino Médio / Maria Madalena Dullius, Marli Teresinha Quartieri (Org.) - Lajeado: Ed. da Univates, 2016. Disponível em: https://www.univates.br/editora-univates/media/publicacoes/191/pdf_191.pdf. Acesso: out. 2018.

b) Pressionar o ícone  no canto superior da tela e ir em “Exibir”. Marcar a opção “Janela de Álgebra”. Irá aparecer uma janela do lado esquerdo da tela onde é possível visualizar os componentes que serão criados.

c) Traçar uma reta qualquer **a** (o próprio *software* irá nomeá-la). Ir ao ícone  e selecionar “Reta”.

d) Partindo do ponto A, traçar uma reta perpendicular à reta **a**. Ir ao ícone  selecionar “Reta Perpendicular”. O aplicativo irá nomeá-la de **b**.

e) Clicar em  e marcar o ponto C sobre a reta b.

f) No ícone  selecionar “Segmento” e marcar os segmentos AB, AC e BC, marcando os pontos, nesta ordem. Ir em  e clicar na opção “Distância, Comprimento ou Perímetro” para medir os segmentos criados anteriormente.

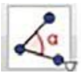
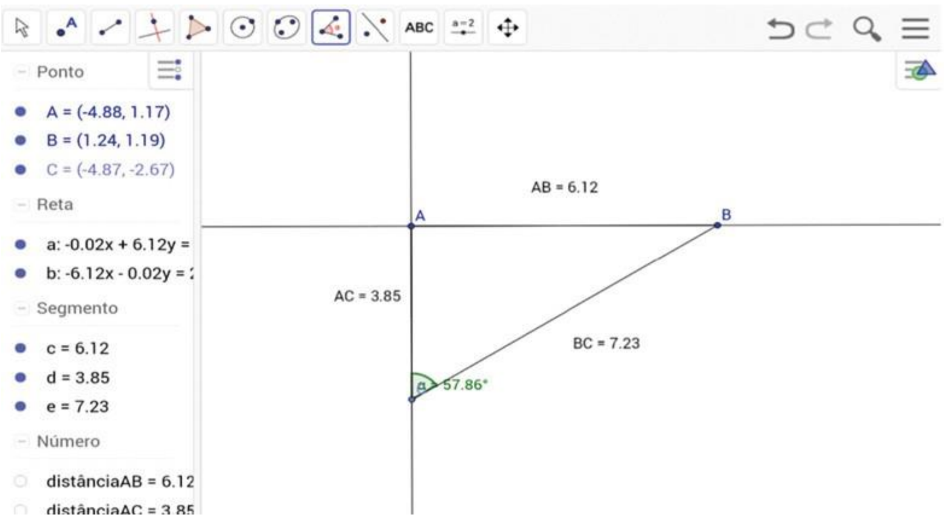
g) Clicar em  e medir o ângulo interno C. Até aqui a tela deve estar semelhante à Figura 3.

Figura 3 – Medindo o ângulo interno C



Fonte: Dos autores.

h) Clicar em  e marcar o ponto D entre os pontos A e B sobre a reta **a.**

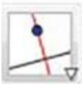
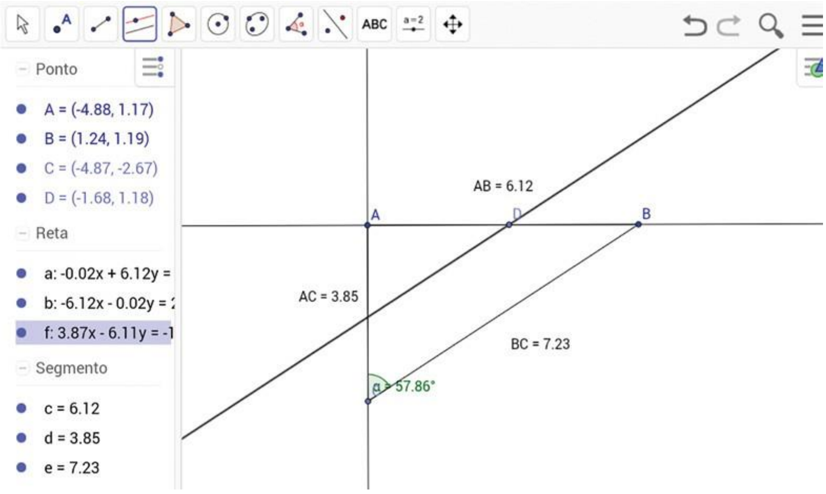
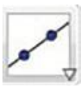
i) No ícone  selecionar “Reta Paralela”. Passar por D uma reta paralela ao segmento BC. Ver na Figura 4.

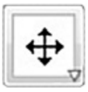
Figura 4 – Reta Paralela



Fonte: Dos autores.

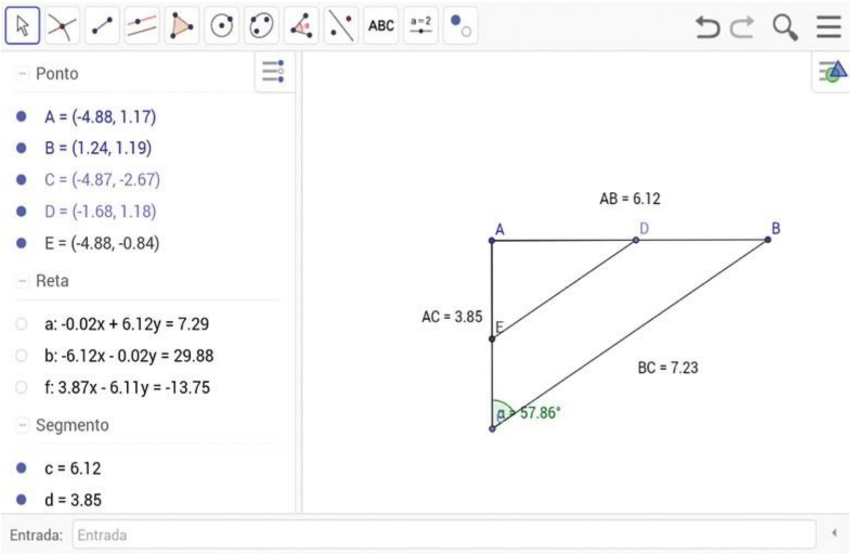
j) No ícone  selecionar “Interseção de dois objetos” e marcar o ponto E de interseção das retas b e g (reta paralela traçada no passo anterior).

k) No ícone  selecionar “Segmento” e traçar os segmentos AD, AE e DE, marcando os pontos nesta ordem.

l) Ir em  e pressionar “Exibir/Esconder Objeto”, selecionar as retas a, b e g e clicar em um ícone qualquer da barra de ferramentas.

m) Pressionar o item  no canto direito superior da tela e marcar a opção “Campo de Entrada”. Na parte inferior da tela principal aparecerá a barra de entrada, nela digitar: RP1=segmento[A,B]/segmento[B,C] e clicar em “Ir” (Figura 5).

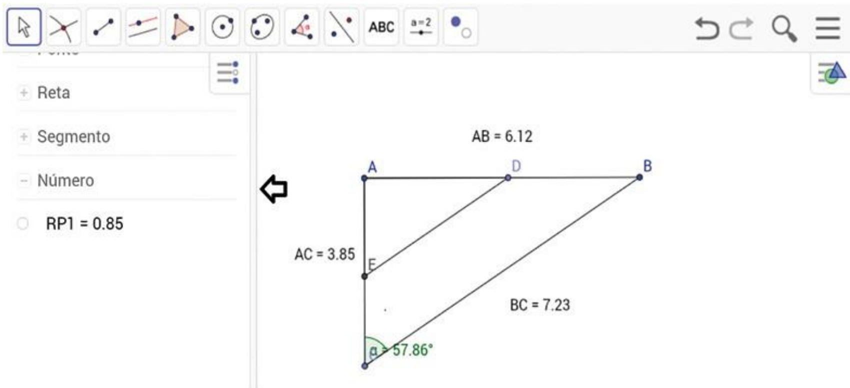
Figura 5: ocultando os itens



Fonte: Dos autores.

Para visualizar RP1, se necessário, ocultar os demais ícones da janela de visualização clicando em que aparece no título dos itens e então descer a barra de rolagem (a seta na Figura 6 indica a barra de rolagem).

Figura 6 – Barra de rolagem



Fonte: Dos autores.

n) Digitar no campo Entrada: RP2=segmento[A,D]/segmento[D,E]. Movimentar o vértice A, B e D. Que conclusões pode-se tirar em relação à medida das razões RP1 e RP2? Por quê?

Movimentar o vértice C. Que conclusões pode-se tirar em relação à medida das razões RP1 e RP2? Por quê?

----

o) Digitar no campo Entrada: RP3=segmento[A,C]/segmento[B,C] e RP4=segmento[A,E]/ segmento[E,D]. Movimentar o vértice A, B e D. Que conclusões pode-se tirar em relação à medida das razões RP3 e RP4? Por quê?

Movimentar o vértice C. Que conclusões pode-se tirar em relação à medida das razões RP3 e RP4? Por quê?

----

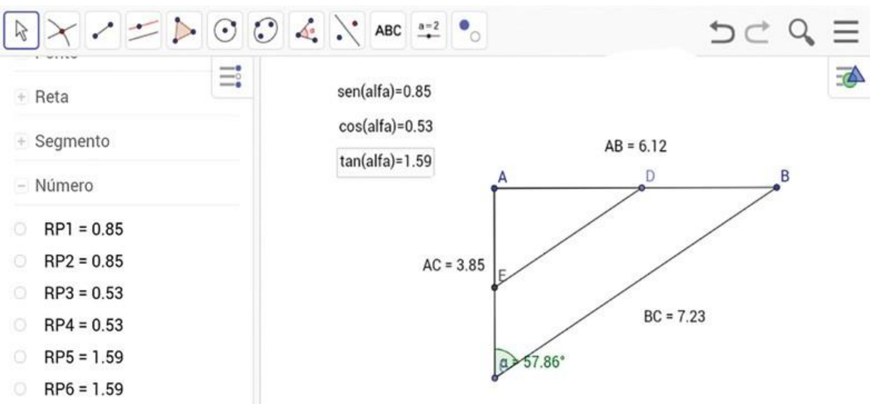
p) Digitar no campo Entrada: RP5 = segmento[A,B]/segmento[A,C] e RP6=segmento[A,D]/ segmento[A,E]. Movimentar o vértice A,B e D. Que conclusões pode-se tirar em relação à medida das razões RP5 e RP6? Por quê?

Movimentar o vértice C. Que conclusões pode-se tirar em relação à medida das razões RP5 e RP6? Por quê?

<u>Observação</u>: Após a conclusão desses exercícios, o professor deverá definir seno, cosseno e tangente relacionados às razões observadas.

q) No campo de Entrada digitar: “sen(alfa)=”(RP1) e clicar em “Ir”. Repetir o procedimento digitando “cos(alfa)=”(RP3) e “tan(alfa)=”(RP5). Até aqui a tela deve estar semelhante à Figura 7.

Figura 7 – Tela com valores de seno, cosseno e tangente



Fonte: os autores

ATIVIDADES

1) A partir da construção realizada, preencher o quadro a seguir:

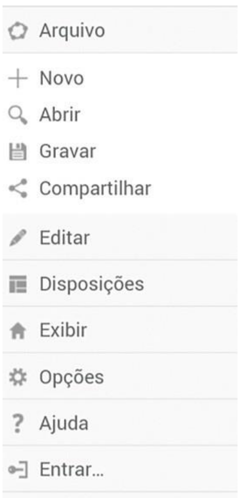
Ângulo α	Seno α	Cosseno α	Tangente α
40º			
	0.57		
			1.43
		0.57	
			1

2) O que acontece com cada uma das razões trigonométricas à medida que aproximamos o vértice B do vértice A? Justificar.

3) O que acontece com cada uma das razões trigonométricas à medida que aproximamos o vértice C do vértice A? Justificar.

r) Para salvar o *Applet*, clicar no ícone  selecionar "arquivo", "compartilhar" e a opção "e-mail" (Figura 8).

Figura 8 – Enviar para o e-mail



Fonte: os autores

Na sequência, daremos encaminhamento a uma atividade de modelagem, com a qual os alunos poderão trabalhar individualmente ou em duplas. Dessa forma, apresentamos o Cálculo de inclinação de ruas com a intenção de verificar se as construções dos conceitos trigonométricos de consolidaram na estrutura cognitiva dos alunos. A atividade proposta tem caráter de revisão.

Cálculo de inclinação de ruas[27]

Tirar uma foto de alguma rua considerada íngreme na cidade para calcular a sua inclinação. Essa foto deve ser tirada de maneira estratégica, tomando o cuidado de aparecer alguma estrutura vertical na imagem, que facilitará o cálculo. Na Figura 1 alguns exemplos.

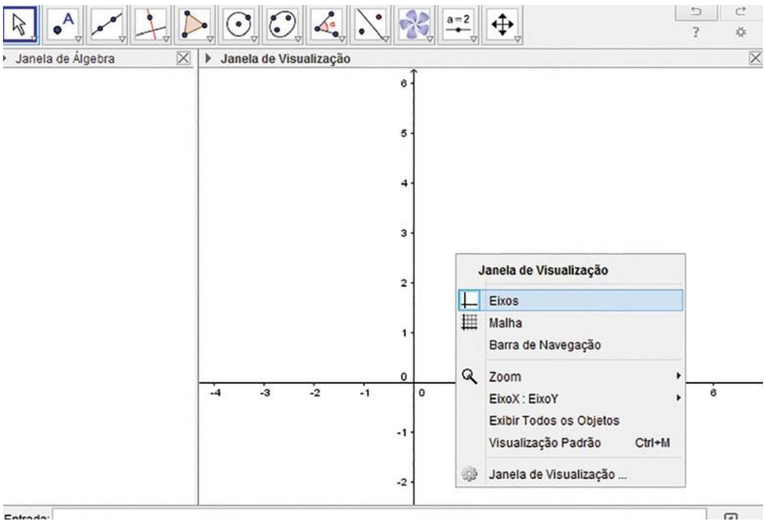
Figura 1 – Exemplos de ruas inclinadas

Fonte: <http://www.sbfisica.org.br/fne/Vol18/Num2/v8n02a04.pdf>.

a) Abrir o aplicativo *GeoGebra* e na aba auxiliar, localizada no canto central direito, selecionar “Álgebra”.

b) Clicar com o botão direito na tela principal e desmarcar a opção “Eixos”, como mostra a Figura 2.

Figura 2 – Tela inicial do *GeoGebra*



Fonte: Dos autores.

27 Adaptada de PADILHA, T. A. F.; BRANCHIER, H. S. A trigonometria no triângulo retângulo por meio de recursos tecnológicos. In: Aproximando a Matemática e a Física por meio de recursos tecnológicos: Ensino Médio / Maria Madalena Dullius, Marli Teresinha Quartieri (Org.) - Lajeado : Ed. da Univates, 2016. Disponível em: https://www.univates.br/editora-univates/media/publicacoes/191/pdf_191.pdf. Acesso: out. 2018.

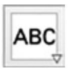
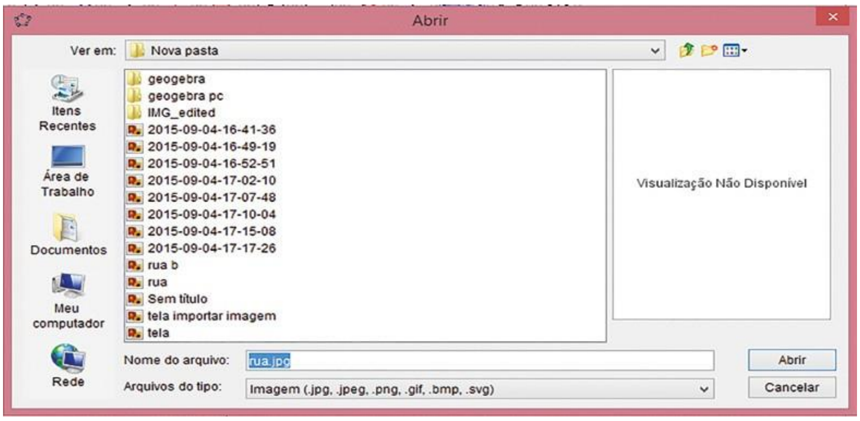
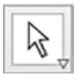
c) Ir em  e selecionar “Inserir Imagem”. Clicar no canto inferior esquerdo para marcar um ponto onde a imagem será inserida. Aparecerá uma janela para selecionar a imagem (Figura 3).

Figura 3 – Importar Imagem



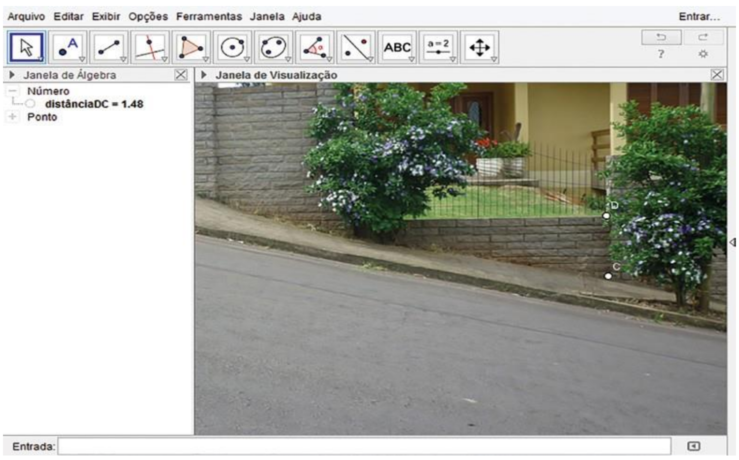
Fonte: Dos autores.

d) Selecionar a imagem escolhida e clicar em “Ok”.

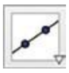
e) Ir em  e arrastar a imagem pela tela para ajustá-la.

f) Ir em  e selecionar a opção “Ponto”. Identificar na imagem uma verticalidade e criar os ponto C e D na aresta vertical, como mostra a Figura 4.

Figura 4 – Marcando os Pontos



Fonte: os autores.

g) Ir em  selecionar “Segmento”. Marcar o segmento CD.

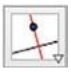
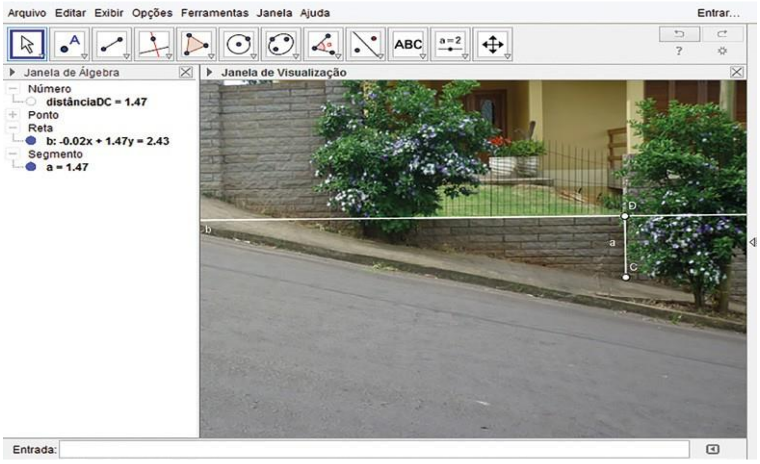
h) Ir em  e selecionar “Reta Perpendicular”. Clicar no vértice superior e selecionar o segmento **a**, como na Figura 5.

Figura 5 – Reta perpendicular



Fonte: Dos autores.

i) Ir em  e selecionar "Ponto". Marcar um ponto sobre a reta perpendicular **b**, na região em que a superfície vertical encosta na rua.

j) Ir em  e selecionar "Exibir/Esconder Objeto". Clicar na reta **b** e então clicar em .

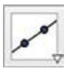
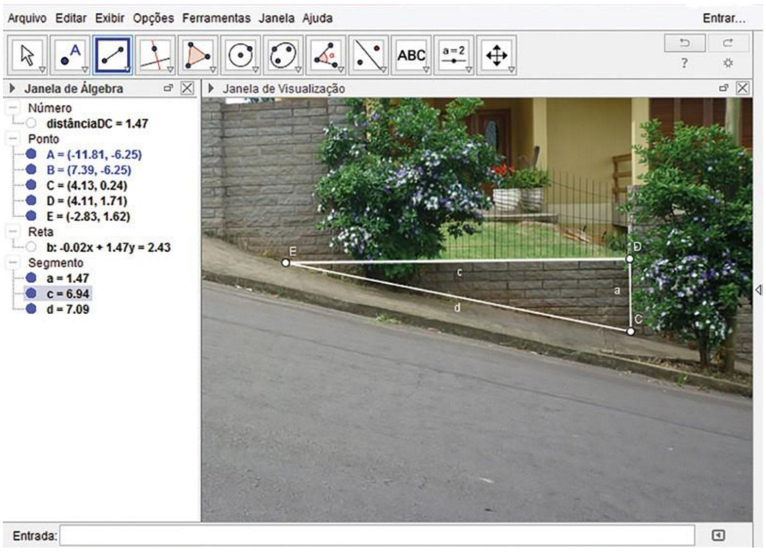
k) Ir para  e selecionar "Segmento". Marcar os segmentos EC e ED, conforme a Figura 6.

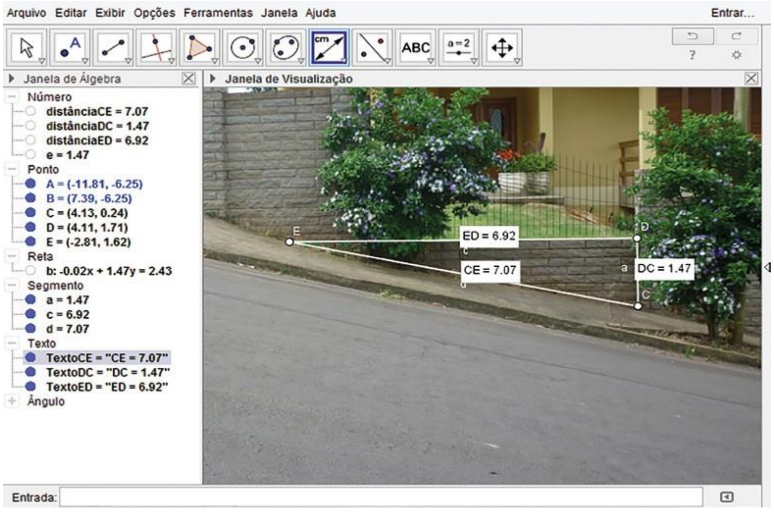
Figura 6 – Marcando os segmentos



Fonte: Dos autores.

l) Ir para  e selecionar "Distância, Comprimento ou perímetro". Medir a distância dos pontos. Para fazer isso, selecionar novamente os pontos marcados na Figura 6. Os valores dos comprimentos aparecerão na tela. (Figura 7). A partir das medidas dos segmentos e dos conhecimentos sobre trigonometria, calcular o ângulo de inclinação da rua.

Figura 7 – Medindo a distância



Fonte: Dos autores.

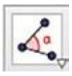
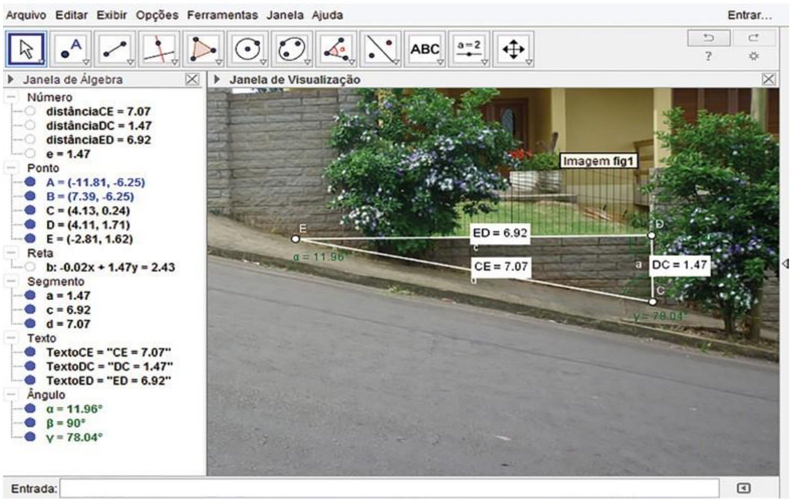
m) Ir em  e selecionar "Ângulo". Para medir, basta selecionar os pontos de modo que o vértice do ângulo a ser medido seja o segundo a ser selecionado na hora de marcar os pontos. Para medir o ângulo α, marcar *EDC*, para medir o ângulo β, marcar *DCE*, e para medir o ângulo γ, marcar *CED* (clicar sobre os vértices na ordem que aparecem). Os valores podem ser visualizados na janela de álgebra, no canto esquerdo, ou na própria imagem, como mostra a Figura 8.

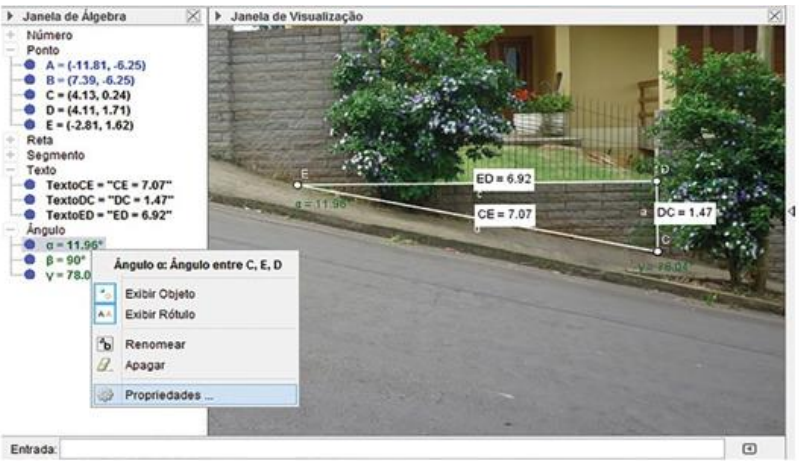
Figura 8 – Medindo os ângulos



Fonte: Dos autores.

n) Em alguns casos, quando a imagem for muito escura, não é possível visualizar os ângulos. Neste caso, é possível mudar algumas configurações, como cor e transparência. Para fazer isso, clicar com o botão direito sobre o ângulo na janela de álgebra e selecionar "Propriedades" (Figura 9).

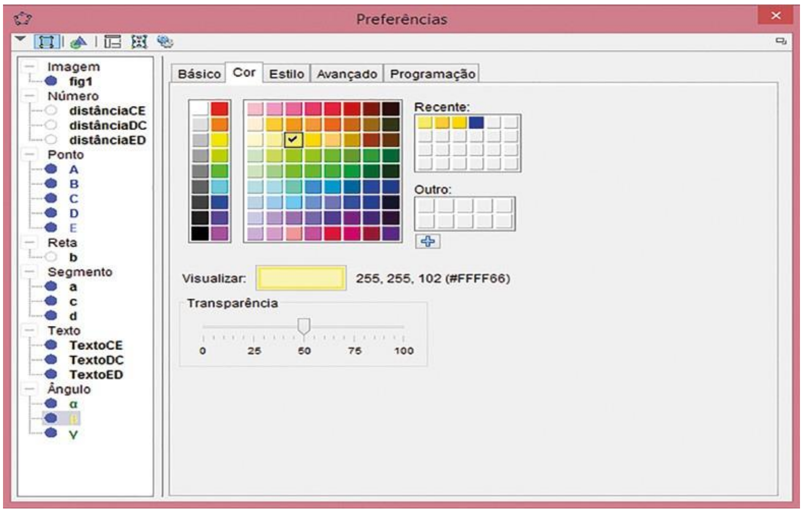
Figura 9 – Aba Propriedades do *GeoGebra*



Fonte: Dos autores.

o) Selecionar a cor e a transparência e fechar a janela (Figura 10).

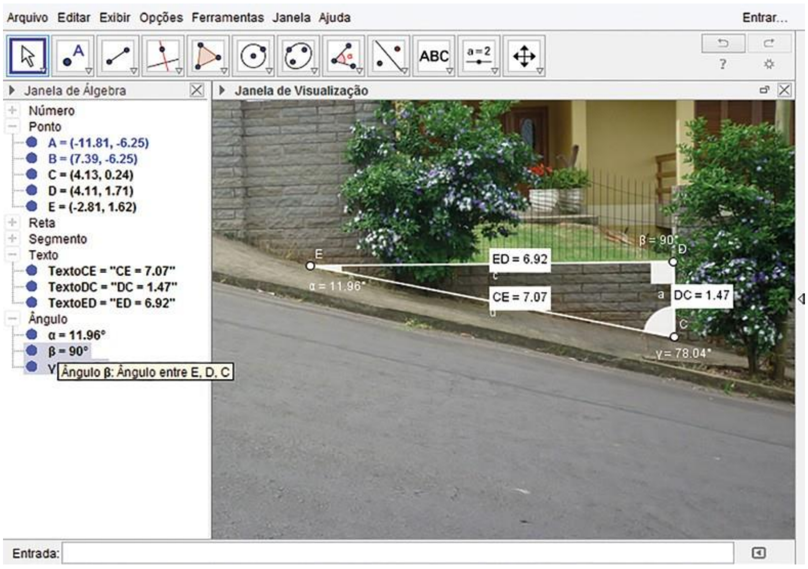
Figura 10 – Selecionando a cor



Fonte: Dos autores.

p) Dessa forma, é possível visualizar os ângulos na imagem (Figura 11).

Figura 11 – Selecionando a cor



Fonte: Dos autores.

Nessa atividade, o professor poderá revisitar todos os conceitos trigonométricos e geométricos trabalhados até então. Nesse sentido, a exploração deve estar articulada com aprendizagem que o aluno poderá demonstrar dentro do contexto da aula:

- Identificar um triângulo retângulo e seus elementos.
- Inferir sobre as razões de ser o triângulo retângulo uma figura geométrica especial.
- Explicitar características que observa nesse triângulo?
- Argui acerca da justificativa do seu nome?

O professor/mediador poderá, com a ferramenta Mover, arrastar o ponto C (hipoteticamente) até que dois de seus ângulos fiquem iguais e questionar os alunos sobre:

- O que aconteceu com a medida seus lados?
- Se o triângulo continua sendo um triângulo retângulo?
- Qual é a medida dos seus ângulos internos?
- Qual é a soma dos seus ângulos internos?
- Quais as razões trigonométricas fundamentais identificadas nesse triângulo?

ANEXOS

ANEXO A – Texto 1

Voltando ao passado para compreender o presente da Trigonometria

Por *Romildo Pereira da Cruz*

Supomos que, na antiguidade, os homens, na busca por explicar fenômenos periódicos, impulsionaram o desenvolvimento de Ciências como astronomia, cosmologia, geometria, engenharias de construção e invento de máquinas. Consequentemente, isso fez emergir a necessidade de se resolver problemas materiais e concretos, impulsionando as primeiras ideias Matemática das civilizações mais antigas.

De acordo com os apontamentos, inferimos que a evolução histórica da trigonometria do triângulo retângulo aconteceu a partir das respostas a perguntas contextualizadas em elementos práticos e vinculados a outras ciências, e essas interações motivaram o surgimento dos principais teoremas que constituem a Trigonometria. De acordo com Boyer (1996, p. 108),

> A trigonometria, como os outros ramos da matemática, não foi obra de um só homem - ou nação. Teoremas sobre as razões entre lados de triângulos semelhantes tinham sido usados pelos antigos egípcios e babilônios. Dada a falta, no período pré-helênico, do conceito de medida de ângulo, tal estudo seria melhor chamado “trilaterometria”, ou medida de polígonos de três lados (triláteros).

Com vista a ampliar a notoriedade da abordagem, Ribeiro (2015, p. 32) salienta que “os egípcios já relacionavam a sombra projetada de uma vareta com a propagação dos raios solares para medir altura, permitindo a construção do relógio solar”. Esse é um caso clássico do princípio de propagação retilínea da luz aplicada à semelhança de triângulos.

Dentro do mesmo contexto, Souza, Victer e Lopes (2011) destacam que, na Grécia antiga, para resolver problemas cotidianos, Tales de Mileto também utilizava o princípio de propagação retilínea da luz. Registros históricos enfatizam que Tales, possivelmente, utilizou a semelhança entre triângulos para identificar a altura de pirâmides no Egito a pedido de um faraó e também calculou a distância compreendida entre um navio e o continente. Com relação ao fato anterior explicitado, Souza, Victer e Lopes (2011, p. 16) asseveram que foi atribuída a Tales a demonstração do teorema: “se dois triângulos têm dois ângulos e um lado respectivamente iguais então eles são iguais”.

De acordo com Ribeiro (2015), a principal contribuição do povo egípcio a essa temática refere-se à utilização da trigonometria para solucionar problemas relacionados à questão da partilha de terra. Segundo o autor, os egípcios utilizavam uma regra chamada de 3-4-5, que significava dividir a terra a partir do traçado de triângulos retângulos com lados proporcionais a 3, 4 e 5 unidades, o que lhes permitia mensurar terrenos com grande exatidão.

Em outra instância, Rocha et al (2002) chama atenção para o fato de os povos babilônicos serem hábeis observadores do céu. Segundo o autor, estes, desenvolveram consideravelmente a astronomia e já conheciam cinco planetas e fenômenos como os eclipses lunares. Em relação à dimensão dos conhecimentos desses povos, Rocha et al (2002, p. 44) destacam que eles já “[...] conheciam o número π com grande precisão, sabiam resolver equações do primeiro e segundo graus e, provavelmente, conheciam a aplicação do teorema de Pitágoras antes do sábio grego”.

Considerando o papel exercido pela astronomia na época, vale referenciar Hiparco de Niceia, o grego é alcunhado um dos mais céleres astrônomos da antiguidade e considerado, posteriormente, o *pai da Trigonometria*. Segundo Souza, Victer e Lopes. (2011, p. 52),

> (...) não se sabe exatamente quando se tornou comum dividir a circunferência em 360 partes, mas isso parece dever-se a Hiparco, assim como a atribuição do nome Arco de 1 grau a cada parte em que a circunferência ficou dividida. Ele dividiu cada arco de 1 grau em 60 partes obtendo o arco de 1 minuto.

Em razão do exposto, podemos denotar a importância do trabalho de Hiparco as futuras relações que viriam se estabelecer a partir dos conceitos explorados por ele. Dentre os quais, as concatenações de sua visão do campo da astronomia para o modelo geocêntrico criado por Claudio Ptolomeu. De acordo com Souza *et al* (2011, p. 55),

> A obra de Ptolomeu é essencialmente astronômica, mas os matemáticos têm interesse devido às identidades trigonométricas que ele utilizou a fim de reunir dados para a sua tábua de corda (que é aproximadamente uma tábua de senos). A circunferência foi dividida em 360 partes (agora chamadas graus), o diâmetro dividido em 120 porções e cada uma dessas foi dividida em 60 partes, de acordo com a primeira versão latina do Almagesto de 1155 d.C.

Neste seguimento, destacamos que os hindus, posteriormente aos gregos continuaram com a aplicação da trigonometria à Astronomia. Contudo, Souza, Victer e Lopes (2011) explicitam que a trigonometria era meramente aritmética enquanto a trigonometria grega era geométrica.

O contexto histórico da trigonometria demonstra por si só, o quão importante ela tem sido para o desenvolvimento da Matemática ao longo do tempo. Mesmo exaltando a importância das contribuições dos povos antigos nesse percurso, salientamos que, somente no século XVII, a partir de Euler, é que a trigonometria alcança a sua forma atual. Souza, Victer e Lopes (2011, p. 63) asseveram que a “transição das razões trigonométricas para as funções periódicas começou com Viète no século XVI, teve novo impulso com o aparecimento do Cálculo Infinitesimal no século XVII e culminou com a figura de Euler”. Os autores (p. 63-64) destacam que,

> Na geometria, álgebra, trigonometria e análise, encontramos simbologia, terminologia e ideias criadas por Euler. Por exemplo, a utilização da letra π, a utilização das letras minúsculas *a, b, c* para os lados de um triângulo e das maiúsculas A, B, C para os ângulos opostos vem também de Euler. Sobre as funções, ele introduziu as expressões *sen x, tan x* (...) e usou as abreviações *sen, cos, tang, cot, sec e cosec* (…).

A partir de Euler, muitos fenômenos físicos que exprimem comportamentos cíclicos, como ondulatória, movimentos harmônicos simples, ondas eletromagnéticas, passaram a poder ser estudados a partir das funções trigonométricas. Enfim a trigonometria, no início uma auxiliar da Agrimensura e da Astronomia, tornou-se primeiramente autônoma e por fim transformou-se em uma parte da Análise Matemática, expressando relações entre números complexos, sem necessidade de recorrer a arcos ou ângulos.

Neste sentido, o conhecimento do como e do porquê do surgimento de um novo conceito e quais as transformações e evoluções por ele sofrido faz-se necessário para o entendimento das suas aplicações moderna. Ademais, acreditamos que o estudo histórico do surgimento de um conceito é importante, pois evidencia os obstáculos epistemológicos do processo de construção do saber matemático.

Em face das concatenações históricas apresentadas, inferimos que o estudo da trigonometria perpassou pelas seguintes fases: se o tomarmos como a ciência analítica estudada atualmente, teremos a origem no século XVII, após o desenvolvimento do simbolismo algébrico. Mas, se o considerarmos para significar a geometria acoplada à Astronomia, as origens remontarão aos trabalhos de Hiparco, no século II a.C., embora existam traços anteriores de seu uso. Se o considerarmos, ainda, para significar literalmente medidas do triângulo, a origem será no segundo ou terceiro milênio antes de Cristo.

Portanto, estudar a história da trigonometria também permite observar o surgimento e o progresso da Análise e da Álgebra, campos da Matemática nela contidos de forma embrionária. De acordo com Costa (2016), a trigonometria, mais que qualquer ramo da matemática, desenvolveu-se no mundo antigo a partir de necessidades práticas, principalmente ligadas à Astronomia, Agrimensura e Navegação.

Referências

BOYER, C. B., **História da Matemática**. 2ª ed. São Paulo: Edgar Blucher, 1996.

COSTA, N. M. L. **A História da Trigonometria.** 2016. Disponível em: http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3_pdf/historia_triogono.pdf. Acesso em nov. 2018.

RIBEIRO, T. N. **O Ensino de razões trigonométricas no triângulo retângulo a partir de situações aplicadas à Física:** um estudo baseado nas Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS). 2015. (Tese). Disponível em: https://s3.amazonaws.com/pgsskroton-teses/94d31c20ec58a2fad699c638c7e87861.pdf. Acesso: jun. 2018.

ROCHA, J. F. M. **Origens e evolução das ideias da Física**. EDUFBA, Salvador/BA, 2002.

SOUZA, C. A. de; VICTER, E. F. e LOPES, J. R.. **Uma breve história da trigonometria e seus conceitos gerais**. Mesquita, RJ: Ed. Entorno, 2011.

ANEXO B – Texto 2

Astrolábio

Por Felipe Fantuzzi

O **astrolábio** é um instrumento antigo que serve para medir a altura dos astros acima do horizonte. É o resultado prático de várias teorias matemáticas desenvolvida pelos gregos – em especial **Hiparco** (180-120 A.C.), um dos grandes matemáticos da Antiguidade – e difundido por **Ptolomeu** (85-165), em seu famoso trabalho Almagesto. Foi posteriormente desenvolvido pela escola islâmica, no século IX, para enfim ser adaptado pelos portugueses para a navegação, com a criação do **astrolábio náutico**.

A grande contribuição de Hiparco para a posterior construção do astrolábio foi ter formalizado a projeção estereográfica como método para resolver problemas astronômicos complexos sem usar trigonometria esférica. Quando e onde este trabalho de Hiparco foi realmente aplicado na construção de um astrolábio é algo que ainda não se sabe. **Theon de Alexandria** (335-405) escreveu um tratado do astrolábio, por volta do ano de 390. Na mesma época, **Sinésius de Cirene** (378-430) descreve um instrumento vagamente semelhante a um astrolábio. Entretanto, apenas no século VI, com **Philoponos de Alexandria**, é que se consegue ter uma descrição em documento da construção e utilização de um astrolábio.

Astrolábio. Foto: a40757 / Shutterstock.com

O astrolábio foi desenvolvido para resolver diversos problemas geométricos, como calcular a altura de uma construção ou a profundidade de um poço – não apenas para problemas astronômicos. Era composto por um disco graduado, onde estavam colocadas várias lâminas circulares. Essas lâminas eram graduadas à superfície das suas margens, o que permitia determinar, por exemplo, a altura dos astros.

O astrolábio foi introduzido no mundo islâmico nos séculos VIII e IX, através de traduções dos textos gregos. Foi desenvolvido inteiramente durante os primeiros séculos do Islam. Era um instrumento muito valioso no Islam por causa de sua capacidade de determinar as horas do dia - e, portanto, a hora de oração

- e também auxiliava na determinação da direção para Meca. Vale ressaltar que a astrologia era um elemento intrínseco na cultura islâmica, e esse também foi um dos principais usos do astrolábio.

O astrolábio se mudou com os islâmicos do norte da África para a Espanha, onde então foi introduzido na cultura européia, sendo amplamente utilizado pelo continente nos séculos XV e XVI, onde foi adaptado para a navegação, com o desenvolvimento do astrolábio náutico de metal, pelo astrônomo Abraão Zacuto, em Lisboa.

Astrolábio Náutico

O astrolábio náutico foi a simplificação do plano e permitia apenas medir a altura dos astros. Inicialmente tinha a configuração da face posterior dos planos, no entanto e com a experiência dos navegadores ganhou uma nova forma. Deixou de ser fabricado em chapa de metal ou madeira e passou a fundir-se em liga de cobre, de modo a que o seu peso o sujeitasse menos ao balanço do navio.

O uso do astrolábio teve seu declínio na segunda metade do século XVII. A invenção do relógio de pêndulos e outros instrumentos científicos mais acurados, como os **telescópios**, passaram a ser disponíveis. A produção do astrolábio continuou até o século XIX, particularmente no mundo árabe. Nos dias de hoje, os astrolábios são construídos apenas por curiosidade ou diversão, embora seu valor educacional continua sendo muito apreciado.

Referências

MORRISON, J. J. E. **Astrolabe History**. Disponível em http://astrolabes.org/history.htm. Acessado em 25 de novembro de 2009.

MONTEIRO, Paulo. **De que falamos quando falamos de astrolábios?** Instituto de Matemática e Arte de São Paulo, 2008.

Arquivado em: Astronomia. Disponível em: https://www.infoescola.com/astronomia/astrolabio/. Acesso: nov. de 2018.

ANEXO C – Construindo um Astrolábio[28]

Nesta atividade, os alunos devem construir um astrolábio caseiro para depois utilizá-lo na obtenção de medidas inacessíveis.

Material necessário

✓ Um transferidor de 180°

✓ Um peso (um clip ou chumbada)

✓ Fita adesiva ou cola quente

✓ Fio de *nylon*

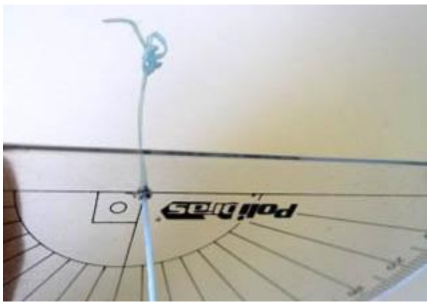
✓ Um alfinete ou uma agulha

✓ Um canudo ou tubo de caneta ou similar

Como fazer

✓ Com o auxílio de uma agulha ou alfinete aquecido, faça um pequeno orifício no centro da circunferência de escala do transferidor.

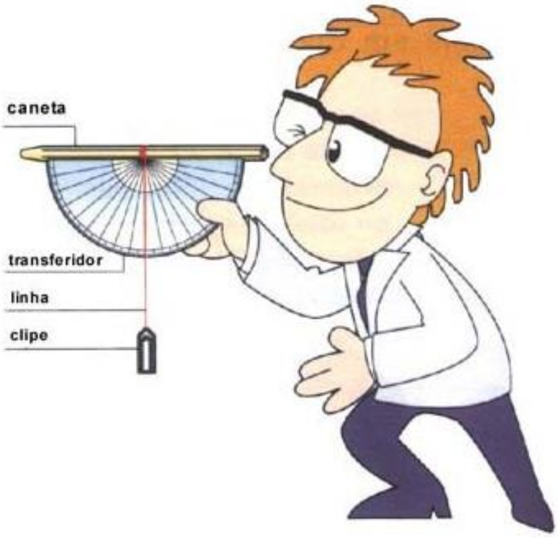
✓ Passe um pedaço de fio de *nylon* de 20 cm, aproximadamente, pelo furo e faça um pequeno nó em uma das extremidades do fio, de maneira a prendê-lo no transferidor.



✓ Na outra extremidade do fio, prenda o peso, que é o que vai manter o fio esticado.

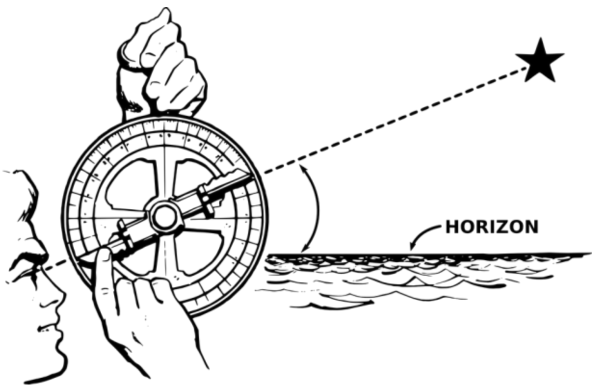
[28] http://clubes.obmep.org.br/blog/obtendo-medidas-inacessiveis-oficina-1/

✓ Fixe o tubo de caneta alinhado sobre a base do transferidor.



Fonte: http://clubes.obmep.org.br/blog/obtendo-medidas-inacessiveis-oficina-1/

Para que usar[29]



Fonte: https://cdn.pixabay.com/photo/2013/07/12/17/15/sextant-151885_960_720.png

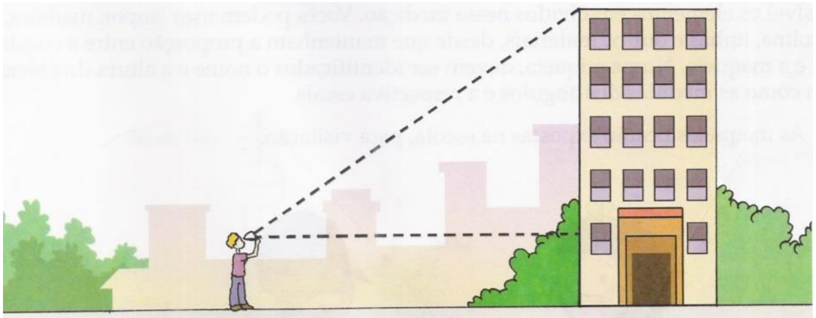
[29] O astrolábio foi desenvolvido para resolver problemas relacionados à Geometria, como, por exemplo, para calcular a altura de uma construção ou a profundidade de um poço, isto é, não era usado apenas na resolução de problemas astronômicos.

Como usar:

- Medir a altura do prédio **colégio**.
- Medir altura de **postes.**
- Medir a altura de uma **árvore**, etc.

Se o aluno for usar o seu astrolábio para calcular as alturas de estruturas como prédios, postes, árvores, etc. Inicialmente, deve ser orientado a se posicionar a uma distância *d* da estrutura (um prédio, por exemplo).

Com o auxílio do astrolábio construído, o professor deverá solicitar ao que o aluno determine o ângulo de elevação do prédio do colégio (ou qualquer outra referência que tenha sido tomada). Nesse caso, o aluno deverá direcionar a linha de fé do transferidor horizontalmente para um ponto do prédio. Mantendo o instrumento fixo nessa posição, levante o canudinho de modo que ele aponte para o alto do prédio e observe a medida *alfa* indicada na escala do transferidor. Suponha que a altura do astrolábio em relação ao solo é *h*. Com os valores *h, d* e *alfa*, será possível determinar a altura *H* do prédio.



Disponível: http://adrimatblog.blogspot.com/2012/02/vamos-construir-um-astrolabio.html

Durante a realização da atividade, o professor poderá explorar o que acontece com as medidas dos ângulos se o aluno tomar uma segunda referência mantendo-se na mesma posição de observação. Fazer questionamentos do tipo: *Por que isso acontece?*

Para motivar os alunos, é interessante comentar sobre a história do matemático Pitágoras. Posteriormente, propor aos grupos de alunos a elaboração de duas situações-problema, imaginadas a partir da atividade de campo desenvolvida com o *Astrolábio*. As situações propostas deverão ser desenvolvidas e problematizadas em sala de aula pelos próprios alunos.

ANEXO D – Projeto piloto

Antes de descrevermos o relato, salientamos que não fazemos neste a análise dos dados emergentes da pesquisa, e sim uma contextualização no intuito de facilitar o entendimento da maneira como trabalhamos para alinhar a proposta de *sequência didática* que foi validada no semestre 2019/A. Reiteramos que a validação da investigação se deu no mesmo contexto do inicialmente testado no Rio Grande do Sul.

Feita a observação, destacamos que, para conduzirmos as ações do “Projeto Piloto”, buscamos embasamento em situações apresentadas por autores que procuraram fazer analogias entre as fases que estruturam *a Engenharia Didática* com situações hipotéticas do dia a dia. Ao aludir acerca da primeira fase da metodologia, Fonseca (2010, p. 65) compara-a com a concepção de Engenharia civil, em que é feita “[...], a sondagem do terreno: tipo de solo, composição dos materiais, tipo de utilidade de estrutura a ser construída etc.” Tomado por estas concepções e direcionamentos, iniciamos o desenvolvimento do nosso trabalho de pesquisa.

Neste, propomo-nos a acompanhar 60 períodos de aula de 50 minutos cada um (todo o 3º trimestre), em uma turma de 9º Ano do Ensino Fundamental, composta de 31 alunos com faixa etária de 14 a 16 anos de idade, de uma escola privada no interior do Rio Grande do Sul, Brasil. O período reportado compreendeu os meses de setembro a dezembro de 2018. Quanto ao longo tempo demandado, destacamos que foi uma opção nossa, com intenção de criar vínculo de confiança, colaboração e interatividade com os alunos. Dessa maneira, imaginamos que, dado o tempo de convivência, os envolvidos pudessem se sentir mais à vontade com a presença do pesquisador em seu ambiente de sala de aula, favorecendo, assim, uma melhor inter-relação entre as partes.

Neste percurso, ainda fazemos saber que, no semestre 2018/B, inicialmente visitamos a escola, as suas dependências, conhecemos sua filosofia, corpo docente, plano político pedagógico, e, por fim, nos inserimos na condição de observador das ações condutivas do conteúdo pelo professor da disciplina. Esta ação também nos oportunizou observar o ambiente e o contexto de desenvolvimento das atividades em sala de aula, tanto pelo professor quanto pelos alunos. Além disso, a intenção desta etapa foi verificar a ambientação estrutural da escola e da sala de aula escolhida para o desenvolvimento da pesquisa, verificar os tipos de materiais e proposições mais utilizados e recorrentes pelo professor, para então estruturar e propor de fato, as atividades a serem desenvolvidas.

Com o início das intervenções, buscamos enfatizar que, para as atividades escritas pertinentes à pesquisa, os alunos não deveriam se identificar, e que os registros desenvolvidos em papel seriam apenas *scanneados* pelo pesquisador com o propósito de manter a veracidade e a fidedignidade das tarefas realizadas. As atividades propostas (introdutórias) buscaram evidenciar a princípio, as concepções (conhecimentos prévios) a respeito da articulação deste estudo com a realidade dos alunos, objetivando elencar indícios de subsunçores que pudessem vir a corroborar com estágio mais avançado de aprendizagem significativa.

No primeiro encontro, foi esclarecido ainda aos alunos que, de acordo com a necessidade de registros das situações consideradas relevantes para o investigador, as aulas seriam eventualmente fotografadas e gravadas, respeitando as cláusulas descritas nos termos de consentimento apresentados nos Apêndices D e E, assinado pelos responsáveis dos alunos e pelo professor investigado. No ensejo, também foi aplicado um questionário (APÊNDICE B), cujas perguntas tencionavam, de maneira simplória, explorar o conhecimento matemático dos alunos acerca da trigonometria, possibilitando a análise das condições *a priori*.

Após a aplicação do questionário, foram seguidos os passos previstos na Parte I da proposta de *sequência didática* apresentada no Apêndice F. Sendo assim, inicialmente, apresentamos e discutimos com os alunos um texto intitulado “*Voltando ao passado para compreender o presente da trigonometria*” (ANEXO A). A leitura consiste em um recorte do próprio investigador com base em sua revisão da literatura relacionada ao contexto histórico da *trigonometria*. Durante a leitura fragmentada do texto, os alunos foram questionados e incentivados a perguntarem e tirarem dúvidas acerca de qual situação abordada não estava claro o suficiente para dar continuidade à discussão sobre o assunto. Nesse sentido, denotamos que o recurso descrito corroborou com o desenvolvimento das discussões da primeira etapa da sequência proposta, com o intuito de evidenciar a importância do estudo da evolução histórica das noções de trigonometria.

Em razão de a abordagem ter sido conduzida por meio de aula expositiva dialogada, no seguimento apresentamos um quadro-síntese para os alunos, com vista a clarificar as variáveis implícitas a partir das informações contidas no texto fornecido. Em face do exposto, enfatizamos a intenção de desvelar para os alunos investigados os principais elementos históricos da trigonometria e o quanto eles ainda influenciam nas aplicações atuais.

As primeiras questões exploradas estavam relacionadas aos temas: *propriedades do paralelismo*, *teorema de Tales e semelhança de triângulo*. Nesta etapa da *sequência didática,* foram trabalhadas as questões relacionadas ao assunto que constavam em suas apostilas (material fornecido pelo colégio). Em seguida, desenvolvemos as questões propostas em nosso material, que é composto por questões mais genéricas. O propósito de utilizar essas questões genéricas deve-se à identificação do nível de conhecimento matemático da turma durante o período de observação. Em outras palavras, tais atividades foram desenvolvidas com base nas observações anteriores das aulas, em que o conteúdo foi trabalhado de modo específico. Sendo assim, por meio de questões genéricas, buscamos identificar se os estudantes conseguiam transpor conhecimentos específicos para contextos mais gerais.

Com isso, foi possível analisar algumas das dificuldades relacionadas à visualização de relações proporcionais, assim como identificação de ângulos côngruos. Outra dificuldade evidenciada era a maneira como os alunos relacionavam as projeções dos lados e dos ângulos dos triângulos semelhantes.

Buscando melhorar a sondagem das necessidades de aprendizagem entorno das relações lado/ângulo do triângulo retângulo, propomos uma atividade exploratória, em um viveiro de plantas (em concordância com a administração do estabelecimento) próximo ao colégio onde desenvolvemos uma das nossas práticas. Com a atividade de campo, a intenção foi verificar a aprendizagem de conceitos discutidos com o professor da disciplina nos moldes de aula tradicional e, na medida do possível, validá-la como uma atividade com potencial para promover aprendizagem significativa. Para esta prática, dispomos de duas aulas de 50 minutos cada. A intervenção consistiu em duas etapas: 1) discussão entre professor e estudantes, com base na realização de tarefas relacionadas com o tema; 2) resolução, pela turma, dividida em grupos, de duas situações-problema apresentadas na *sequência didática* proposta no Apêndice F.

A intencionalidade foi encontrar um caminho para que o aprendizado de conceitos geométricos ocorresse de forma a produzir melhores resultados do que os já tradicionais experienciados em situações pontuais pelo pesquisador. Perspectivamos, naquele momento, conduzir as atividades de forma que os alunos se sentissem à vontade na construção de seus próprios conhecimentos. Dessa forma, procuramos identificar os conhecimentos geométricos apropriados por alunos do 9° Ano do Ensino Fundamental participantes da pesquisa.

Durante a atividade, a turma foi disposta em um círculo e ao centro, com a ajuda de cinco estudantes voluntários, utilizando um esquadro de madeira e uma marreta, foram fixadas ao solo cinco estacas. A orientação fornecida pelo pesquisador era de que, com as estacas, deveriam formar o triângulo com um de seus ângulos reto. Com um pequeno prego no topo de cada uma das estacas, passou-se um fio de *nylon* que cortava todos os pontos do triângulo, perfazendo o seu perímetro total.

Após ter interligado os pontos comuns do triângulo retângulo, pedimos para que observassem a disposição das estacas, verificando se conseguiam visualizar os triângulos semelhantes representados. Solicitamos, ainda, que estabelecessem letras representativas dos vértices atrelados a cada estaca. Na proposição, foram feitas perguntas acerca da abertura (maior/menor) do ângulo. Ademais, foram perguntadas questões relativas à classificação dos triângulos quanto às medidas dos lados e dos ângulos correspondentes. Conforme as respostas surgiam, cada estudante fazia anotações.

Na sequência, com o auxílio de uma trena e de um transferidor, os alunos foram orientados a medir dois ângulos e dois lados do triângulo (maior) aleatoriamente. Tal momento foi oportuno para se discutir as primeiras relações existentes entre ângulos e lados do triângulo retângulo. Em seguida, de posse dessas medidas obtidas, foi questionado se, sem utilizar a trena, seria possível determinar as medidas do terceiro segmento do triângulo (maior) e dos outros três lados do triângulo (menor). Após alguns olhares e troca de informações, alguém disse: “Acho que se trata de semelhança de triângulos”. Como a resposta estava correta, foi solicitado que, em pequenos grupos, calculassem as medidas dos lados do triângulo (menor). Para isso deveriam desenhar o triângulo em seus cadernos e poderiam utilizar a calculadora.

Esgotado o tempo, dos seis grupos formados, apenas dois grupos conseguiram executar o cálculo com êxito. Sendo assim, um dos grupos, utilizando um quadro branco e canetões, demonstrou aos demais como o fizeram. Ao final da demonstração, percebemos que nem todos se lembravam das relações existentes em semelhança de triângulos, pois o foco inicial para eles foi apenas a aplicação do teorema de Pitágoras para determinarem a hipotenusa ou um dos catetos do triângulo (maior) a partir dos lados tomados como referência. Porém, havia clareza de que a soma dos ângulos internos do triângulo correspondia a 180°.

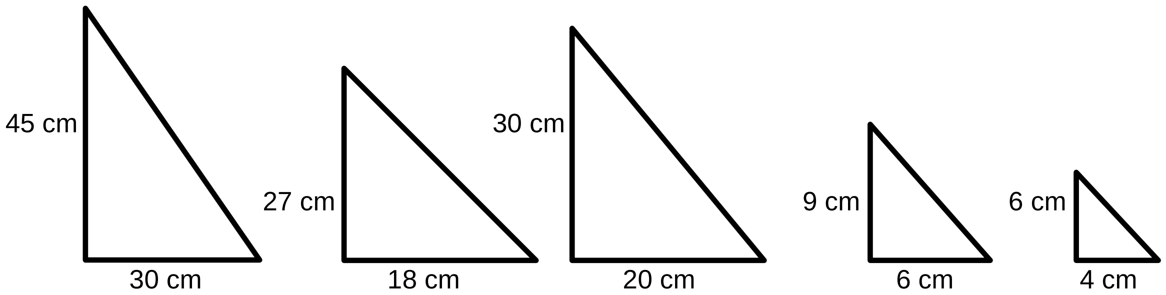
Ciente da necessidade de ampliação da compreensão dos alunos acerca da abordagem e tencionando atingir um dos objetivos da atividade, que era proporcionar momentos para exposição de ideias e posicionamentos, a turma foi questionada sobre o que aconteceria ao traçar a altura do triângulo e logo alguém respondeu que o triângulo se transformaria em dois triângulos retângulos.

Assim, buscamos expandir as possibilidades de construção da compreensão dos conceitos implícitos na atividade, ou seja, que ao aluno fosse oportunizado ser um agente do seu próprio aprendizado. Em razão disso, na etapa seguinte, apresentamos novas hastes (varetas) de tamanhos variados que foram distribuídas aos grupos de alunos que estavam em sala de aula. Estes foram convidados novamente a retornarem ao pátio da escola e fixar as varetas de vários comprimentos, verticalmente, no chão e relacionar suas sombras com a do prédio da escola. Como o dia estava ensolarado, aproveitamos o momento para explicar que a propagação dos raios do Sol se dá aproximadamente em paralelos.

Feita a contextualização, questionamos acerca do que eles enxergavam a partir das varetas fixadas. Como se abateu um silêncio sepulcral naquele momento, retomamos a contextualização do texto e logo perceberam que o que estávamos experenciando era algo muito parecido com o que os gregos utilizaram para medir as Pirâmides do Egito citadas no texto. Ainda perceberam que a haste e a sombra projetada eram dois lados do triângulo retângulo.

Questionamos de quais lados se tratavam e alguém respondeu que eram os catetos, uma vez que não tínhamos o lado maior do triângulo. Perguntamos: se os raios do Sol se propagam sobre as hastes com o mesmo ângulo de inclinação, de que tipo de triângulo se estar falando?

Após discussão acerca das hipóteses e constatação de que se tratava de triângulos semelhantes, solicitamos que construíssem uma tabela em seus cadernos e que nela registrassem as medidas das alturas das varetas com o comprimento das suas respectivas sombras. Como os triângulos obtidos pelos alunos eram retângulos, cujos catetos eram identificados pelas hastes e sombras, e, dada a proporcionalidade entre eles foram criados modelos (figuras) representativos dos triângulos. Hipoteticamente, os modelos criados pelos alunos conduziram-nos a construção da razão de proporcionalidade (em razão do Ângulo de incidência do Sol ser o mesmo para todas as estacas) que por vez tornou-se o ponto de partida para a construção de uma das razões trigonométricas. A exemplo da experiência de Tales de Mileto, os alunos relacionaram triângulos imaginários e aplicando o conhecimento do conteúdo de semelhança de triângulo, concluíram que:



Onde, $\frac{45}{30} = \frac{27}{18} = \frac{30}{20} = \frac{9}{6} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Assim, foi encontrada a razão: $\frac{a}{b} = \frac{caeto\ oposto\ a\ A}{cateto\ adjacente\ a\ A}$. Esta razão foi denominada de *tangente* de **A**. Posteriormente, trabalhamos outra ação em sala de aula: a construção de triângulos semelhantes a partir de uma folha de papel quadrada. Para o desenvolvimento da atividade, nos apropriamos do uso de outros materiais (papel cartão, tesouras, canetões, régua, lápis, transferidor e outros). Tal atividade está descrita no encontro 1 da Parte I da *sequência didática* proposta Apêndice F, com algumas alterações no sentido de potencializar ainda mais a atividade.

No encontro seguinte, explicamos e propusemos que cada um dos participantes elaborasse e apresentasse um mapa conceitual (também utilizando tecnologias mais conservadoras, isto é, papel e lápis). O intuito dessa atividade foi levantar os primeiros indícios da aprendizagem.

A partir desse momento, ocorreu o início da Parte II da *sequência didática* proposta, em que foi realizada uma atividade em sala de aula, com a leitura de texto e construção do *Astrolábio*, seguida de uma atividade de campo (testagem do Astrolábio). Inicialmente, partimos da leitura do texto intitulado “Astrolábio” (ANEXO B). Após a leitura silenciosa do texto, fizemos comentários acerca do assunto, a fim de favorecer a reflexão de diferentes ideias relativas ao tema abordado. Em meio à conjuntura, foi apresentado um vídeo explicativo (gravado pelo próprio investigador) acerca do funcionamento do instrumento. Após o vídeo, distribuímos um tutorial para que os alunos pudessem confeccionar o *Astrolábio.*

Durante o desenvolvimento dessa atividade, que foi realizada em pequenos grupos, surgiram indagações pertinentes ao assunto abordado. A nosso ver, essas interrogações demonstraram o envolvimento e a motivação dos alunos com a estratégia elencada. Tal observação corrobora e retrata os motivos que impulsionaram este pesquisador a utilizar diferentes tecnologias de ensino para contextualizar um assunto que, por vezes, é considerado desprezível pelos nossos alunos. No envolvimento grupal, pudemos observar neles, novamente, a curiosidade e o interesse pelo saber, tornando a história uma ferramenta para poder esclarecer os questionamentos e construir conhecimentos.

Com o propósito de aprofundar os conhecimentos, deslocamo-nos no encontro seguinte com os educandos (divididos em grupos) ao pátio da escola em busca de fazermos uso do instrumento construído em sala de aula. Em razão das comprovações pelos próprios estudantes, instigamo-los para que relatassem suas descobertas. Após esse momento, já de volta à sala de aula, incumbimos os grupos de redigir um pequeno texto contendo dados sobre a origem do *Astrolábio* e, dada a experiência que tiveram na aula de campo, que formulassem duas situações-problema envolvendo suas observações com o instrumento construído.

Em face do exposto, destacamos que a nossa intenção com a atividade foi de problematizar situações. Ao lançar o desafio sobre o assunto *Astrolábio*, pretendíamos levar os alunos à reflexão, à busca de respostas e à produção do conhecimento. Nesse sentido, intuímos que, feitas essas concatenações e transposições de conceitos teóricos para situações práticas, o aluno possa estar expandindo os seus subsunçores, permitindo-lhe *diferenciação progressiva* da abrangência do conteúdo, que, a nosso ver, culminará em uma *reconciliação integradora* com conhecimentos prévios ancorados em sua estrutura cognitiva.

No percurso, antes de discutirmos as situações-problema redigidas pelos grupos, explicamos que, embora o *Astrolábio* tenha sido substituído por equipamentos mais modernos, como menciona Fantuzzi em seu texto “Astrolábio”, sua utilização ainda é possível e, se empregado adequadamente, esse instrumento rudimentar pode fornecer dados com um bom grau de precisão. Para concluirmos o encontro, solicitamos que relatassem ao grande grupo algumas situações-problema vivenciadas nessa experiência e a partir dessas escrevessem um problema de aplicação para que aprofundássemos a discussão acerca da noção das relações trigonométricas.

Dando seguimento, damos início à última etapa da *sequência didática* (Parte III), em que os alunos interagiram com tecnologias informáticas. Para atingirmos nosso objetivo, utilizamos *notebooks, tablets, smartphones* e o *software GeoGebra*.

A escolha do *GeoGebra* como um aliado dos processos de ensino e de aprendizagem resulta da sua popularidade e de seu caráter dinâmico em relação a recursos geométricos, facilitando a manipulação de ferramentas que possam favorecer a percepção do aluno na construção do conhecimento. Em outra instância, podemos destacar o interesse e a interação que os alunos atuais possuem em relação às tecnologias informáticas.

Em busca de elencarmos dados acerca da influência que o uso desses recursos possa promover entorno do assunto, propomos inicialmente a atividade de construção do triângulo retângulo apoiada pelo *GeoGebra*, por meio de um tutorial disponibilizado aos alunos no grupo formado no *whatsApp*. Posteriormente, no dia da construção, esse tutorial foi entregue impresso às duplas formadas. Os encaminhamentos descritos no tutorial direcionavam os procedimentos que os alunos deveriam realizar ao manipularem o *software*.

Concomitantemente, na sequência do tutorial, foram incluídos questionamentos acerca do funcionamento do *software* e da percepção dos alunos em relação das razões existentes entre os lados do triângulo em construção. Além disso, discutimos a influência dos eixos cartesianos para a obtenção das razões *seno, cosseno* e *tangente* na construção do triângulo. Da mesma forma, foi retomado o conceito de semelhança de triângulos, na intenção de reforçar a variação das razões em função do ângulo.

Com a construção do triângulo nesse *software*, além da construção dos conceitos *seno* e *cosseno* e do aprofundamento do conceito *tangente,* perspectivamos que ao aluno fosse oportunizado um momento de testagem de eventuais hipóteses relacionadas ao tema, pois, uma vez construída a figura, ela poderia ser movimentada conservando as propriedades que lhes haviam sido atribuídas. Essa possibilidade de deformação da imagem por meio do *software* permite o acesso rápido e contínuo a diferentes casos, tornando-o uma ferramenta rica para a validação experimental de comprovações ou refutações de fatos geométricos.

Ao que nos parece, a proposta de uso do *software* para o fechamento do ciclo das atividades que buscamos validar e a análise da estrutura da *sequência didática* pensada podem favorecer a consolidação de aprendizagem significativa da *trigonometria no triângulo retângulo.* Em se tratando do desenvolvimento das atividades, o professor teve um papel importante, porém secundário no que se trata do momento de realização das tarefas. Como tínhamos imaginado, com o auxílio do tutorial, poucas foram às participações do docente, pois o conteúdo não foi transmitido como em uma aula tradicional, na qual os alunos olham para o professor e para o quadro tentando compreender aquela informação que, muitas vezes, é apresentada como uma verdade sem qualquer justificativa.

Em contraposição a essa metodologia tradicional, o trabalho com o *GeoGebra* favoreceu a construção do conhecimento pelos próprios alunos, que passaram a ser os protagonistas de condução do aprendizado, dividindo esta responsabilidade, que antes era exclusiva do professor. Dessa forma, supomos que o aluno possa ter aprendido com as tecnologias *notebook, tablet* ou telefones celulars e, consequentemente, com *software* – e não a partir delas, conforme perspectiva de Jonassen (2007) –, ao manipular as ferramentas do *software*, utilizando suas próprias percepções e criando possibilidades diferenciadas para o seu aprendizado.

Nesse contexto, acreditamos que a manipulação do *software* configura uma experimentação, na qual o aluno foi convidado a observar a existência de três triângulos retângulos e a modificar sua estrutura a partir de um de seus vértices, verificando que em um triângulo retângulo a semelhança se mantém independentemente da deformação. Após os alunos perceberem a semelhança existente nos três triângulos retângulos, foram convidados a checar algumas situações propostas no tutorial, resolvendo exercícios ali propostos.

Em seguida, foram explicadas as noções sobre as principais medidas usuais em um triângulo retângulo para o trabalho com trigonometria. Para tanto, foi retomado o conceito anteriormente discutido e especificado a diferenciação entre cateto oposto e cateto adjacente, conforme posição em relação ao "ângulo de trabalho".

Após relacionarmos a semelhança de triângulos à *trigonometria* e construirmos as razões trigonométricas, utilizamos o cálculo de inclinação de uma rua (fotografia tirada pelos próprios alunos), no intuito de observar melhor o que tinham aprendido até aquele momento. Os alunos abriram o arquivo da fotografia no *GeoGebra* e, auxiliados por um tutorial previamente distribuído, começaram a modelar o triângulo retângulo identificado na imagem.

Por meio do tutorial, propomos aos alunos que, manipulando o *GeoGebra*, determinassem *seno*, *cosseno* e *tangente* do ângulo de inclinação encontrado em cada fotografia. A atividade passou a ser desenvolvida em dupla e em sala de aula, uma vez que o número de *notebooks* e *tablets* disponibilizados não era suficiente para que trabalhassem individualmente.

Após desenvolvimento das atividades propostas acerca da *trigonometria no triângulo retângulo*, supomos que os alunos tenham ampliado seus subsunçores para estudos mais elaborados acerca do tema. Tal afirmação é confirmada pelos resultados obtidos na reaplicação dos instrumentos de coleta de dados: a) mapa conceitual final elaborado a partir da utilização do *software Cmaptools*; e b) as respostas ao questionário final.

Sendo assim, podemos afirmar que foi alcançado o objetivo da aplicação do projeto piloto, qual seja validar a organização da *sequência didática* para o ensino de *Trigonometria* no 9º ano do Ensino Fundamental. Apresentada a síntese de como conduzimos nosso projeto piloto, explicitamos, na seção seguinte, os desdobramentos futuros da investigação por meio de um cronograma de atividades.

UNIVATES